

Билјана Крстеска

Јасмина Маркоска

Рецензенти

Д-р Билјана Златановска,

факултет за информатика, универзитет „Гоце Делчев“-Штип

Александра Дамеска,

СЕПУГС „Васил Антевски Дрен“, Скопје

Јелена Бабович Најдова,

СУГС Гимназија „Орце Николов“, Скопје.

Илустрации: Авторите

Лектура: Виолета Јовановска

Со одлука за одобрување на учебникот МАТЕМАТИКА (ИЗБОРЕН), за III година на средното стручно четиригодишно образование (Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Графичка/ Графичарство, Економско-правна и трговска/Економија, право и трговија, Електротехничка/Електротехника, Здравствена/Здравство и социјална заштита, Земјоделска-ветеринарна/Земјоделство, рибарство и ветеринарство, Лични услуги, Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/ Текстил, кожа и слични производи, Угостителско-туристичка/Угостителство и туризам и Шумарско-дрвопреработувачка/Шумарство и обработка на дрво) бр. 26-2145/1 од 4.9.2023 година донесена од Националната комисија за учебници.

CIP

ПРЕДГОВОР

Учебникот **МАТЕМАТИКА** за трета година на средното стручно четиригодишно образование е пишуван според наставната програма за истоимениот избран предмет. Намењет е за учениците од Геолошко-рударската и металуршката струка, сектор Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетската струка, сектор Градежништво и геодезија, Графичката струка, сектор Графичарство, Економско-правната и трговската струка, сектор Економија, право и трговија, Електротехничката струка, сектор Електротехника, Здравствената струка, сектор Здравство и социјална заштита, Земјоделската-ветеринарната струка, сектор Земјоделство, рибарство и ветеринарство, струка Лични услуги, сектор Лични услуги, Машинската струка, сектор Машинство, Сообраќајната струка, сектор Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарската струка, сектор Текстил, кожа и слични производи, Угостителско-туристичката струка, сектор Угостителство и туризам и Шумарско-дрвопреработувачката струка, сектор Шумарство и обработка на дрво.

Авторите настојуваа да ги обработат предвидените содржини во согласност со дидактичко-методското упатство за реализација на програмата. Учебникот е модулarno дизајниран и се состои од пет модуларни единици:

- Системи квадратни равенки со една непозната (јадро)
- Системи линеарни неравенки со две непознати (јадро)
- Сложена каматна сметка (јадро)
- Математичка индукција (јадро)
- Комплексни броеви (за електро струка)
- Решавање на остроаголен триаголик (за машинска струка)
- Вектори во простор (за електро и за машинска струка)
- Матрици (за економска струка)
- Елементарни функции. Гранична вредност на функција (за економска струка)

Во рамките на секоја наставна тема обработени се предвидените содржини, кои, по правило, се илустрирани со решени примери и цртежи. На крајот од секоја наставна единица дадени се задачи за самостојна работа на часот или за домашна работа, што претставува продолжување на работата на часот, а на крајот од секоја наставна тема дадени се задачи за повторување и утврдување на материјалот. Решенијата и одговорите на задачите, а по избор на авторите, некаде и упатство за нивно решавање, дадени се на крајот од учебникот.

Авторите однапред ќе бидат благодарни за секоја добронамерна критика или забелешка за подобрување на содржината, бидејќи веруваат дека оваа книга ќе придонесе учениците повеќе да ја засакаат математиката и да навлезат во нејзините тајни.

Јуни, 2021

Авторите

1. СИСТЕМИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

1.1. Систем од една квадратна и една линеарна равенка со две непознати

Множеството од равенки со две исти непознати се вика **систем равенки со две непознати**. **Решение** на систем равенки со две непознати е секој подреден пар вредности на непознатите (x_0, y_0) , кој е решение на секоја од равенките на системот. Да се реши даден систем равенки со две непознати значи да се определи множеството од сите негови решенија т.е. да се одредат заедничките решенија на секоја од равенките на системот, во множеството реални броеви $\mathbb{R}$.

Два системи равенки со две непознати се **еквивалентни** ако имаат еднакви множества решенија. Ако една од равенките во системот ја замениме со равенка еквивалентна на неа добиваме систем еквивалентен на дадениот.

Систем од две равенки од кои едната е линеарна равенка со две непознати, а другата е квадратна равенка со две непознати се вика **систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати**. Заради теоремите за еквивалентни равенки, секој систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати е еквивалентен со систем од видот

$$\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

наречен **општ облик на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати** со коефициенти m, n, p, a, b, c, d, e и f , каде што барем еден од коефициентите a, b, c е различен од нула и коефициентите a, b, d или b, c, e и m, n не се истовремено еднакви на нула.

Пример 1. Системот

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 3 \\ \frac{1}{9}x^2 = 1 - \frac{1}{9}y^2 \end{cases}$$

е систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати. Тој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} x - 3y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Подредениот пар $(0, -3)$ е решение на дадениот систем, додека подредениот пар $(1, 2)$ не е негово решение. Навистина, имаме дека

$$\begin{cases} 0 - 3 \cdot (-3) - 9 = 0 \\ 0^2 + (-3)^2 - 9 = 0 \end{cases}, \text{ но } \begin{cases} 1 - 3 \cdot 2 - 9 \neq 0 \\ 1^2 + 2^2 - 9 \neq 0 \end{cases}$$

Решавање систем од една линеарна и една квадратна равенка со две непознати

Да го илустрираме со пример методот за решавање на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати.

Пример 2. Да го решиме системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Од првата равенка на системот добиваме $x = 10 - y$. Заменувајќи го добиениот израз за x во втората равенка на системот ја добиваме равенката

$$(10 - y)^2 + y^2 = 0$$

која е еквивалентна со квадратната равенка

$$y^2 - 10y + 50 = 0$$

чии корени се

$$y_1 = 5 + 5i \text{ и } y_2 = 5 - 5i.$$

Заменувајќи ги добиените вредности за y ги добиваме соодветните вредности за x :

$$x_1 = 5 - 5i \text{ и } x_2 = 5 + 5i.$$

Споре тоа, решенијата на дадениот систем се подредените парови

$$(5 - 5i, 5 + 5i) \text{ и } (5 + 5i, 5 - 5i).$$

$$\text{Проверка: } \begin{cases} 5 - 5i + 5 + 5i = 10 \\ (5 - 5i)^2 + (5 + 5i)^2 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 5 + 5i + 5 - 5i = 10 \\ (5 + 5i)^2 + (5 - 5i)^2 = 0 \end{cases}$$

Пример 3. Системот $\begin{cases} x = y \\ x^2 = y^2 \end{cases}$ има бесконечно многу решенија т.е. секој елемент од множеството $M = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ е решение на системот.

Пример 4. Да го решиме системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5 = 0 \\ 5x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 2y - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Од првата равенка на системот добиваме } x = -\frac{3y + 5}{2}.$$

Со замена на добиениот израз за x во втората равенка на системот ја добиваме равенката:

$$5\left(-\frac{3y + 5}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{3y + 5}{2}\right)y - y^2 + 3\left(-\frac{3y + 5}{2}\right) - 2y - 11 = 0$$

која е еквивалентна на квадратната равенка

$$29y^2 + 104y + 51 = 0,$$

чии корени се $y_1 = -3$ и $y_2 = -\frac{17}{29}$. Заменувајќи ги добиените вредности за y ги

добиваме соодветните вредности за x :

$$x_1 = -\frac{-9+5}{2} = 2 \text{ и } x_2 = -\frac{-\frac{51}{29}+5}{2} = -\frac{94}{58} = -\frac{47}{29}.$$

Според тоа, решенија на дадениот систем се подредените парови

$$(2, -3) \text{ и } \left(-\frac{47}{29}, -\frac{17}{29}\right).$$

Проверка:
$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 5 = 0 \\ 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot (-3) - (-3)^2 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 11 = 0 \end{cases} \text{ и}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot \left(-\frac{47}{29}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) + 5 = 0 \\ 5 \cdot \left(-\frac{47}{29}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{47}{29}\right) \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) - \left(-\frac{17}{29}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{47}{29}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{17}{29}\right) - 11 = 0 \end{cases}.$$

Како што веќе рековме општиот облик на систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати гласи

$$\begin{cases} mx + ny + p = 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \end{cases}.$$

Да претпоставиме дека $m \neq 0$. Ако во првата равенка ја изразиме едната непозната преку другата, на пример $x = -\frac{p+ny}{m}$, и така добиениот израз за x го замениме во втората равенка го добиваме системот

$$\begin{cases} x = -\frac{p+ny}{m} \\ a\left(-\frac{p+ny}{m}\right)^2 + b\left(-\frac{p+ny}{m}\right)y + cy^2 + d\left(-\frac{p+ny}{m}\right) + ey + f = 0 \end{cases}.$$

Погорниот систем е еквивалентен на дадениот, бидејќи е добиен со примена на еквивалентни трансформации. Добиените решенија по y на втората равенка од системот ги заменуваме во првата равенка од системот. На тој начин ги добиваме соодетните решенија по x .

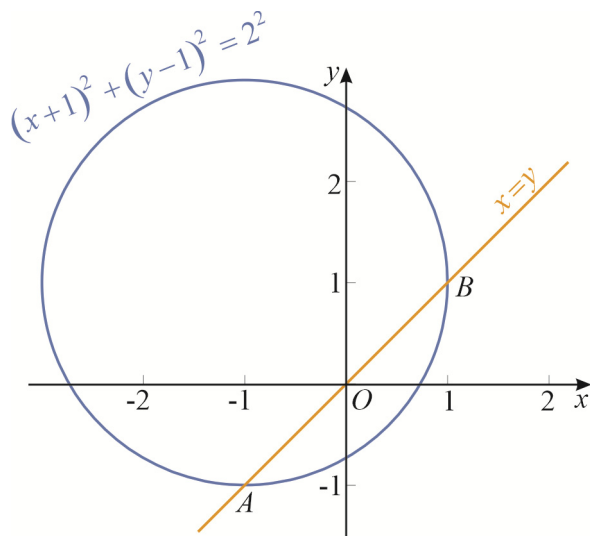
Треба да имаме предвид дека секоја линеарна равенка со две непознати геометриски претставува права, а секоја квадратна равенка со две непознати претставува крива од втор ред (кружница, елипса, хипербола или парабола). Геометриската интерпретација на решението на системот од една линеарна и една квадратна равенка со две непознати е всушност анализа на заемниот однос што го имаат правата и кривата.

Пример 5. Да ја разгледаме геометриската интерпретација на решението на системот:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Првата равенка во системот може да ја запишеме како $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ што геометриски е кружница со центар во точката $C(-1,1)$ и има радиус $r=2$, а

втората равенка геометриски е права која минува низ точките $(0,0)$ и $(1,1)$. Ако од таа равенка се замени $y = x$ во првата равенка ќе се добие равенката $x^2 = 1$ чии решенија се $x_{1/2} = \pm 1$ т.е. $y_{1/2} = \pm 1$.



Цртеж 1

Според тоа, решението на системот се подредените парови $(-1,-1)$ и $(1,1)$ т.е. точките A и B на цртежот 1, кои се пресечни точки на правата и кружницата.

Задачи

1. Кои од следниве системи е систем од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

а) $\begin{cases} 2x = y \\ y^2 + xy = 4y \end{cases};$

б) $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ x^2 + xy - 3 = y^2 \end{cases};$

в) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + xy^2 = 4 \end{cases};$

г) $\begin{cases} 3x + 2z = 7 \\ x^2z + 3z^2 = 6 \end{cases};$

д) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 0 \\ x^2 + \sqrt{3}y^2 = 2x - y \end{cases};$

е) $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 0 \\ x^2 = -\sqrt{5}y^2 \end{cases};$

2. Дали подредениот пар $(1,-2)$ е решение на системот од линеарна и квадратна равенка:

а) $\begin{cases} 4x = 2 - y \\ x^2 + 3xy + 3y^2 = 7 \end{cases};$

б) $\begin{cases} y = 2x \\ x^2 + \frac{1}{2}xy + 5y^2 - 3 = 0 \end{cases};$

в) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases};$

3. Кои од следниве подредени парови е решение на системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати $\begin{cases} x + y = 1 \\ (x-1)^2 + xy + y^2 + 3y = 5 \end{cases};$

а) $(0,1);$

б) $\left(3, \frac{1}{2}\right);$

в) $(6,-5);$

г) $(1, -\sqrt{2}).$

4. Трансформирај го дадениот систем во општ облик:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} 3x = 1 - y \\ 3x^2 + y^2 = 4 \end{cases}; & \text{б)} \begin{cases} \frac{3}{4}y = \frac{1}{2}x - 12 \\ x^2 + \sqrt{2}xy = y^2 + \frac{1}{2} \end{cases}; \\ \text{в)} \begin{cases} x = z - 4 \\ x^2 + 2z^2 = x - 3z + \frac{1}{2} \end{cases}; & \text{г)} \begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + xy + 3y^2 = 1 - x \end{cases}; \\ \text{д)} \begin{cases} y = 10 + x \\ (x-1)^2 + 2(y-3)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}; & \text{ѓ)} \begin{cases} \frac{1}{2}x = -\sqrt{3}y \\ x^2 + 3y = 0 \end{cases}. \end{array}$$

5. Реши го системот од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x = 8 - y \\ xy = 15 \end{cases}; & \text{б)} \begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}; & \text{в)} \begin{cases} 2(x-3) = 6(x-y) \\ xy = 4 \end{cases}; \\ \text{г)} \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x^2 - 2y^2 = 10 \end{cases}; & \text{д)} \begin{cases} 3x - 2y - 12 = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x - 4y = 0 \end{cases}. & \end{array}$$

6. Кои од следниве системи имаат реални решенија, а кои конјугирано комплексни решенија?

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}; & \text{б)} \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}; & \text{в)} \begin{cases} y = x - 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}; \\ \text{г)} \begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x^2 + xy + \frac{1}{3}y^2 = 1 - x \end{cases}; & \text{д)} \begin{cases} y = 3x + 1 \\ 2(x-2)^2 + \frac{1}{3}(y-3)^2 = -1 \end{cases}; & \text{ѓ)} \begin{cases} x = 1 + y \\ 3xy = 0 \end{cases}. \end{array}$$

1.2. Систем од две квадратни равенки со две непознати

Дефиниција 1. Системот од облик

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}$$

каде што левите страни на двете равенки се полиноми од втор степен со две променливи, се вика **систем од две квадратни равенки со две непознати**.

Да се реши систем од две квадратни равенка со две непознати значи да се најде множеството подредени парови (x_0, y_0) за кое што двете равенки на системот преминуваат во идентитет кога x ќе се замени со x_0 , а y со y_0 , односно важи

$$\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0y_0 + c_1y_0^2 + d_1x_0 + e_1y_0 + f_1 = 0 \\ a_2x_0^2 + b_2x_0y_0 + c_2y_0^2 + d_2x_0 + e_2y_0 + f_2 = 0 \end{cases}.$$

Ако системот има барем едно решение, велиме дека тој е **решлив**, а ако тој нема ниту едно решение, тогаш за него велиме дека е **противречен**.

Пример 1. Подредениот пар $(1,1)$ не е решение на системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = \frac{3}{2}(x+y) \\ 5x^2 - xy - y^2 = 7(x+y) \end{cases}$$

бидејќи со замена за $x=1$ и $y=1$ не се добива идентитет за втората равенка.

Решавањето систем од две квадратни равенки со две непознати нема општ метод. Честопати треба да се направи комбинација од неколку трансформации како замена на некој израз, елиминација на непозната или слободен член и слично.

Едноставен облик на систем од две квадратни равенки со две непознати е системот

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1 \\ a_2x^2 + b_2y^2 = c_2 \end{cases}.$$

Решавањето на овој систем се врши преку елиминација на x^2 или y^2 , а потоа се бараат решенијата на добиената неполна квадратна равенка.

Пример 2. Системот $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 14 \\ 3x^2 - y^2 = 10 \end{cases}$ ќе го решиме прво со елиминација на

y^2 т.е. прво втората равенка ќе ја помножиме со 3, а потоа ќе ги собереме равенките и имаме $2x^2 + 3y^2 + 3(3x^2 - y^2) = 14 + 3 \cdot 10$ т.е. $11x^2 = 44$, од каде што имаме дека $x^2 = 4$. Со замена во една од равенките во системот се добива $y^2 = 2$. Со оглед на тоа што $x_{1/2} = \pm 2$ и $y_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ се добиваат решенијата

$$(2, \sqrt{2}), (2, -\sqrt{2}), (-2, \sqrt{2}) \text{ и } (-2, -\sqrt{2}).$$

Откривање на линеарна врска меѓу непознатите кај систем од две квадратни равенки со две непознати

Ако системот е од облик

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ xy = d \end{cases}, \text{ за } a, b > 0,$$

тогаш втората равенка се проширува соодветно со $2\sqrt{ab}$ така што со собирање и одземање на тој израз со левата страна од првата равенка се добива полн квадрат т.е. $ax^2 \pm 2\sqrt{ab}xy + by^2 = (\sqrt{a}x \pm \sqrt{b}y)^2$. На овој начин се добива линеарна врска меѓу променливите во системот.

Пример 3. Решај го системот $\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 26 \\ 3xy = 5 \end{cases}$.

Ако втората равенка ја помножиме со 2 и ја додадеме на првата равенка, тогаш $x^2 + 6xy + 9y^2 = 26 + 10$ т.е. $(x + 3y)^2 = 36$. Од оваа равенка се добиваат две линеарни врски меѓу променливите $x + 3y = 6$ или $x + 3y = -6$, па заедно со

втората равенка ги даваат системите $\begin{cases} x+3y=6 \\ 3xy=5 \end{cases}$, $\begin{cases} x+3y=-6 \\ 3xy=5 \end{cases}$. Ако, пак, втората равенка помножена со 2 ја одземеме од првата равенка, тогаш ќе добиеме $x^2 - 6xy + 9y^2 = 26 - 10$ т.е. $(x-3y)^2 = 16$. Од оваа равенка се добиваат другите две линеарни врски меѓу променливите $x-3y=4$ или $x-3y=-4$, па заедно со втората равенка ги даваат системите $\begin{cases} x-3y=4 \\ 3xy=5 \end{cases}$, $\begin{cases} x-3y=-4 \\ 3xy=5 \end{cases}$. Решенијата на системите се $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, -1\right)$, што се решенија и на почетниот систем.

Аналогна постапка може да се примени кога системот е од облик

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ xy = e \end{cases}.$$

Втората равенка се проширува така што со додавање, односно одземање од првата равенка левата страна на првата равенка ќе стане полн квадрат.

Задачи

1. Провери дали парот $(1,1)$ е решение на системот:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x^2 - 2x + y^2 - 2 = 0 \\ x^2 + 2y - 3y^2 + 1 = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 - 3xy \\ x^2 - xy + y^2 + 2y = 3 \end{cases}.$$

2. Реши го системот:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ -2x^2 + 3y^2 = 25 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 7 \\ x^2 + 5y^2 = 9 \end{cases}.$$

3. Реши го системот:

$$\text{а) } \begin{cases} (2x+3y)^2 = 7y \\ (3x+2y)^2 = 7y \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} (7x-2y)^2 = 25y \\ (2x-7y)^2 = 25y \end{cases}.$$

4. Реши го системот:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 = 4y + 1 \\ x^2 + 3 = 4y + y^2 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 = 2y - 7 \\ x^2 + 23 = 2y + y^2 \end{cases}.$$

5. Реши го системот:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ xy = 6 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases}.$$

1.3. Систем од две квадратни равенки со две непознати од кои едната е хомогена

Пред да преминеме на разгледување на систем од две квадратни равенки со две непознати од кои едната е хомогена равенка, ќе се задржиме малку на хомогена равенка со две непознати.

Хомогена квадратна равенка со две непознати

Дефиниција 1. Равенката од видот

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 0$$

се нарекува **хомогена равенка со две непознати од n -ти ред**.

Специјално, за $n = 2$ се добива равенката $a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = 0$.

Дефиниција 2. Равенката $a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = 0$ се нарекува хомогена равенка од втор ред со две непознати или **хомогена квадратна равенка со две непознати**.

Еден начин на решавање на хомогена квадратна равенка со две непознати е да се запише во обликот

$$y^2 \left(\frac{a_0x^2}{y^2} + \frac{a_1xy}{y^2} + \frac{a_2y^2}{y^2} \right) = 0 \text{ т.е. } y^2 \left(a_0 \left(\frac{x}{y} \right)^2 + a_1 \frac{x}{y} + a_2 \right) = 0.$$

Од овој производ следува вкупноста

$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ a_0 \left(\frac{x}{y} \right)^2 + a_1 \left(\frac{x}{y} \right) + a_2 = 0 \end{cases}$$

Ако $y^2 = 0$, т.е. $y = 0$, тогаш и $x = 0$, па $(0, 0)$ е решение на хомогената равенка. Нека $y \neq 0$. Ако ставиме смена $t = \frac{x}{y}$ во втората равенка од вкупноста ќе се добие квадратна равенка по непознатата t . Со нејзино решавање и замена на $x = ty$ во почетната равенка се добива квадратна равенка со една непозната, x .

Друг начин на решавање на хомогена равенка е ако ја набљудуваме како квадратна равенка со непозната x или y .

Пример 1. Дадена е равенката $3x^2 - 2xy - y^2 = 0$. Да ја одредиме вредноста на $\frac{x}{y}$.

Јасно е дека $(0, 0)$ е решение на равенката. Да претпоставиме дека $y \neq 0$, па после делењето на равенката со y^2 се добива $3 \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{y} \right) - 1 = 0$. Со

смената $t = \frac{x}{y}$ се добива равенката $3t^2 - 2t - 1 = 0$ чии решенија се $t_1 = -\frac{1}{3}$ и

$t_2 = 1$. Ова значи дека бараната вредност на $\frac{x}{y}$ е $-\frac{1}{3}$ и 1 .

Пример 2. Да ја одредиме вредноста на xy во равенката $3x^2 + \frac{5x}{y} - \frac{8}{y^2} = 0$.

Ако равенката ја помножиме со y^2 се добива $3(xy)^2 + 5xy - 8 = 0$, од каде со смената $xy = t$ се добива равенката $3t^2 + 5t - 8 = 0$ чии решенија се $t_1 = -\frac{8}{3}$ и $t_2 = 1$.

Во продолжение ќе се задржиме на некои специјални случаи на систем од две квадратни равенки со две непознати за кои во извесна смисла постои општ метод за наоѓање на решението.

Хомогени системи

Дефиниција 3. Системот од облик

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

се вика **хомоген систем од две квадратни равенки со две непознати**.

Значи, хомоген систем од две квадратни равенки со две непознати е систем од две квадратни равенки со две непознати во кој една од квадратните равенки е хомогена.

Постапката за решавање на системот се состои од следниве чекори:

- Проверуваме дали $x = 0$, $y = 0$ е решение на системот.
- При $x \neq 0$, $y \neq 0$ ја делиме првата равенка со x^2 (или со y^2), а потоа ја воведуваме смената

$$t = \frac{y}{x} \text{ (или } t = \frac{x}{y} \text{)}.$$

Тогаш, ако t_1 и t_2 се корени на квадратната равенка

$$c_1t^2 + b_1t + a_1 = 0 \text{ (или } a_1t^2 + b_1t + c_1 = 0 \text{)},$$

тогаш множеството решенија на хомогениот систем (1) е унија од множествата решенија на системите

$$\begin{cases} t_1 = \frac{x}{y} \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} t_2 = \frac{x}{y} \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}.$$

Значи, хомогениот систем од две квадратни равенки со две непознати се сведува на систем кај кој може да се најде линеарна врска меѓу непознатите.

Пример 3. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases}.$$

Во првиот чекор проверуваме дали $x=0$, $y=0$ е решение на системот. Очигледно е дека за $x=0$ од првата равенка добиваме дека $y=0$, но $x=0$, $y=0$ не е решение на втората равенка од дадениот систем. Значи $x=0$, $y=0$ не е решение на дадениот систем.

Нека $x \neq 0$. Ја делиме првата равенка со x^2 , а потоа воведуваме смена $t = \frac{y}{x}$. Ја добиваме квадратната равенка $-2t^2 - t + 1 = 0$ чии корени се $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Тогаш множеството решенија на дадениот хомоген систем е унија од множествата решенија на системите

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = -1 \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0. \end{cases}$$

Оттука добиваме дека решенија на дадениот систем се подредените парови

$$(1, -1), (3, -3), \left(-13 - \sqrt{157}, \frac{1}{2}(-13 - \sqrt{157})\right), \left(-13 + \sqrt{157}, \frac{1}{2}(-13 + \sqrt{157})\right).$$

Пример 4. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ 2x^2 + 25xy - 8y^2 = 5 \end{cases}.$$

Дадениот систем не е хомоген систем од две квадратни равенки со две непознати, но можеме да го сведеме на хомоген ако првата равенка ја помножиме со 5, втората со -1 и потоа ги собереме. Новиот систем кој што е хомоген и еквивалентен на дадениот е

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Проверуваме дали $x=0$, $y=0$ е решение на системот. Очигледно е дека $x=0$, $y=0$ не е решение на дадениот систем.

Да претпоставиме дека $y \neq 0$. Ја делиме втората равенка со y^2 а потоа воведуваме смена $t = \frac{x}{y}$. Добиваме квадратната равенка $3t^2 - 10t + 3 = 0$ чии корени се $t_1 = 3$ и $t_2 = \frac{1}{3}$. Тогаш множеството решенија на дадениот хомоген систем е унија од множествата решенија на системите

$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Оттука добиваме дека решенија на дадениот систем се подредените парови

$$(1,3), (-1,-3), \left(\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right) \text{ и } \left(-\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

Симетрични системи

Друг вид на системи од две квадратни равенки со две непознати за кои што постои метод за наоѓање на решенијата се симетричните системи.

Дефиниција 4. Системот од облик

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + a_1y^2 + d_1x + d_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + a_2y^2 + d_2x + d_2y + f_2 = 0 \end{cases}$$

се вика **симетричен систем од две квадратни равенки со две непознати**.

За да го решиме тој систем воведуваме смена

$$x + y = u \text{ и } xy = v.$$

Тогаш првата равенка го добива обликот

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1xy + a_1y^2 + d_1x + d_1y + f_1 &= \\ &= a_1(x^2 + 2xy + y^2) - 2xy + b_1xy + d_1(x + y) + f_1 = \\ &= a_1u^2 + (b_1 - 2)v + d_1u + f_1 = 0 \end{aligned}$$

а втората $a_2u^2 + (b_2 - 2)v + d_2u + f_2 = 0$.

Потоа, со елиминација на u^2 системот се сведува на систем од една квадратна и една линеарна равенка со две непознати u и v . Ако (u_0, v_0) е решение на новиот систем, тогаш на него соодветствува следниот систем по непознатите x и y :

$$\begin{cases} x + y = u_0 \\ xy = v_0 \end{cases}.$$

Според Виетовите формули добиваме дека решенијата на последниот систем се токму решенијата на квадратната равенка

$$z^2 - u_0z + v_0 = 0.$$

Според тоа, ако z_1 и z_2 се корени на квадратната равенка, тогаш решение на системот се паровите $x_1 = z_1$, $y_1 = z_2$ и $x_2 = z_2$, $y_2 = z_1$.

Пример 5. Реша го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + 2xy + y = 1 \end{cases}.$$

За да го решиме дадениот симетричен систем од две квадратни равенки со две непознати ја воведуваме смената $x + y = u$ и $xy = v$. Тогаш имаме

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v \text{ и } x + 2xy + y = u + 2v,$$

па за новите непознати u и v го добиваме системот

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 5 \\ u + 2v = 1 \end{cases}.$$

Ако ги собереме двете страни на последниот систем ја добиваме квадратна равенка $u^2 + u - 6 = 0$, чии што решенија се $u_1 = 2$ и $u_2 = -3$. Оттука наоѓаме дека решенија на последниот систем се

$$u_1 = 2, v_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } u_2 = -3, v_2 = 2.$$

Според тоа, множеството решенија на дадениот систем е унија од множествата решенија на системите

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}.$$

Нивните решенија се совпаѓаат со решенијата на квадратните равенки

$$z^2 - 2z - \frac{1}{2} = 0, \text{ и } z^2 + 3z + 2 = 0.$$

Конечно, добиваме дека решенија на симетричниот систем се подредените парови

$$\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}, 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right), (-1, -2), (-2, -1).$$

Следниот метод има за цел едната од двете равенки во системот да ја претвори во хомогена.

Да го разгледаме системот

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + f_2 = 0 \end{cases}.$$

Ако првата равенка ја помножиме со f_1 , а втората со $-f_2$ и ги собереме двете равенки, тогаш ќе добиеме хомогена квадратна равенка со две непознати која со било која од двете почетни равенки дава систем од две квадратни равенки со две непознати од кои едната е хомогена.

Пример 6. Реши го системот $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2 - 3xy + y^2 = -5 \end{cases}.$

Ако првата равенка ја помножиме со 5, а втората со 7 и ги собереме ќе добиеме хомогена квадратна равенка

$$12x^2 - 26xy + 12y^2 = 0 \text{ т.е. } 6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0.$$

Од оваа равенка се добива $y^2(6t^2 - 13t + 6) = 0$, каде $t = \frac{x}{y}$. Вредноста $y = 0$ не е решение на системот, па со решавање на квадратната равенка $6t^2 - 13t + 6 = 0$ се добива $t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{2}{3}$. Со враќање во смената се добиваат линеарните равенки

$$x = \frac{3}{2}y \text{ и } x = \frac{2}{3}y, \text{ односно системите } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x = \frac{3}{2}y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}.$$

Од тука се добиваат решенијата $(2, 3), (-2, -3), (3, 2), (-3, -2)$.

Пример 7. Да го решиме системот $\begin{cases} x^2 + x + xy = 4 \\ y^2 + y + xy = 8 \end{cases}$.

Ако првата равенка се помножи со y , а втората со $-x$ и равенките се соберат ќе се добие $y = 2x$. Со замена во првата равенка имаме $3x^2 + x - 4 = 0$ чии решенија се $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{4}{3}$, од каде се добива дека $y_1 = 2$ и $y_2 = -\frac{8}{3}$.

Задачи

Реша ги системите:

1. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 - 3x - y + 3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Реша ги следниве системи од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

а) $\begin{cases} 2x - 1 = y \\ 3x^2 = 4 - y^2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}y - 12 \\ x^2 + \frac{1}{2} = y^2 - \sqrt{2}xy \end{cases}$.

2. Одреди ги решенијата на следниве системи од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

а) $\begin{cases} x + 4 = z \\ x^2 + 2z - x = -3z + \frac{1}{2} \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + y^2 = 90 \end{cases}$.

3. Одреди ги решенијата на следниве системи од линеарна и квадратна равенка со две непознати:

а) $\begin{cases} 2(x - 3) = 6(x - y) \\ xy = 4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$.

4. Кои од дадените системи од квадратни равенки се хомогени:

а) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 10 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6y^2 + x = 0 \\ 2x^2 - 9xy + y^2 = 29 \end{cases}$.

5. Реша ги хомогените системи квадратни равенки:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 20 \end{cases}$.

6. Доведи ги до хомоген облик, а потоа реши ги следниве системи

квадратни равенки:

$$\text{а)} \begin{cases} 6x^2 - 7xy + 3y^2 = 4 \\ 5x^2 + 6xy - 7y^2 = -11 \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}.$$

7. Кои од дадените системи квадратни равенки се симетрични:

$$\text{а)} \begin{cases} x^2 - y^2 = 6x + 6y - 9 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 7 \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x^2 + 2xy + 6y^2 = 4 \\ x^2 - 9xy + y^2 = 29 \end{cases}.$$

8. Најди ги решенија на симетричните системи квадратни равенки:

$$\text{а)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = -2 \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \\ xy = 5 \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ x + xy + y - 7 = 0 \end{cases};$$

$$\text{г)} \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}.$$

9. Реши ги системите равенки:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}.$$

10. Реши ги системите равенки:

$$\text{а)} \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 6 \\ y^2 + xy + y^2 = 4 \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 14 \\ x^2 - y^2 = 10 \end{cases}.$$

11. Реши ги системите равенки:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 12 \\ 5x^2 - 2y^2 = 11 \end{cases}.$$

12. Реши ги системите равенки

$$\text{а)} \begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 4y = 3 \\ x - 5y + 5 = 0 \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 8 \\ 2x^2 - 7y^2 = -3 \end{cases}.$$

13. Реши ги системите равенки

$$\text{а)} \begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6x = 27 \\ x - 5xy + 6y^2 = 0 \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + y - y^2 = 8 \end{cases}.$$

2. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

2.1. Линеарна равенка со две непознати

Според бројот на непознатите што ги содржи една равенка таа може да биде: равенка со една непозната, равенка со две непознати итн.

На пример, равенки со една непозната се:

$$x = 2x - 1, \quad 3(x + 4) = 3x + 12, \quad x + 3 = x + 4,$$

а со две непознати:

$$y + x = -x + 8, \quad xy = x(1 + y) + 2 - x \quad \text{и} \quad 2(x + y) = 2x + 2y.$$

Во продолжение ќе се задржиме на линеарни равенки со две непознати, односно на линеарна равенка од видот $ax + by = c$, каде $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Решение на равенката $ax + by = c$ е секој подреден пар реални броеви (x_0, y_0) за кој равенството $ax_0 + by_0 = c$ е вистинито бројно равенство. Множеството од сите решенија на равенката се нарекува **множество решенија на равенката**.

Да го најдеме множеството решенија на равенката $ax + by = c$. Разгледуваме три случаи:

1. Ако $a = b = 0$ и $c = 0$ тогаш равенката има бесконечно многу решенија.

2. Ако $a = b = 0$ и $c \neq 0$ тогаш равенката е невозможна.

3. Ако барем еден од коефициентите a и b е различен од нула, на пример нека $b \neq 0$, дадената равенка е еквивалентна со равенката $y = \frac{c - ax}{b}$. Значи, ако k е произволна вредност на непознатата x , тогаш решение на равенката е парот $\left(k, \frac{c - ak}{b}\right)$. Значи, равенката има бесконечно многу решенија.

Пример 1. Да ја разгледаме равенката $2x - y = 6$.

Дадената равенка е еквивалентна со равенката $y = 2x - 6$. Парот $(k, 2k - 6)$ каде што k е произволен реален број е решение на дадената равенка, односно множеството $\{(k, 2k - 6) \mid k \in \mathbb{R}\}$.

Множеството решенија на равенката $ax + by = c$ уште се нарекува и **график** на линеарната равенка со две непознати. Графикот на линеарна равенка со две непознати е **права**.

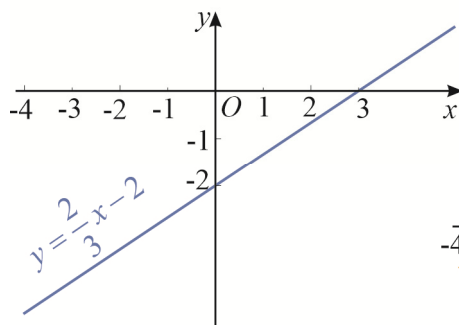
Нека е дадена линеарната равенка со две непознати $ax + by = c$ и нека $b \neq 0$. Графички да се реши оваа равенка со две непознати значи да се нацрта графикот на оваа равенка. Тој график е права.

Пример 2. На цртеж 1 е претставено графичкото решението на равенката $2x - 3y = 6$.

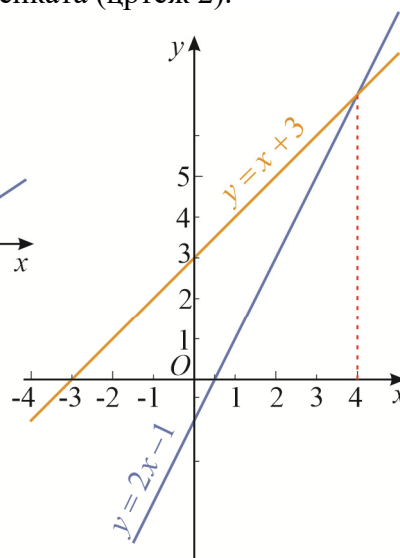
Графички да се реши линеарната равенка со една непозната од облик $f(x) = g(x)$, значи да се најде апсцисата на пресечната точка на графиците на равенките $f(x) = y$ и $g(x) = y$. Ова ќе го илустрираме со пример.

Пример 3. Графички да ја решиме равенката $2x - 1 = x + 3$.

Од пресечната точка на графиците $y = 2x - 1$ и $y = x + 3$ повлекуваме нормала на x -оската со цел да ја најдеме апсцисата на пресечната точка. Со тоа добиваме дека $x = 4$, што е решение на равенката (цртеж 2).



Цртеж 1



Цртеж 2

Задачи

Решете ги равенките:

1. $x - y = 1$.

2. $\frac{x}{3} + 2y - 1 = 0$.

3. $4x = -2 + \frac{y}{7}$.

Графички решете ги следниве равенки:

4. $x - 1 = -x + 5$.

5. $2x + 7 = -2x - 1$.

6. $-x - 1 = -x + 5$.

7. $\frac{7-x}{3} = 1 - x$.

8. $x + y = -1$.

9. $2x + y = 7$.

10. $x = 0$.

11. $y = 4$.

2.2. Линеарна неравенка со две непознати

Да се потсетиме, дека два изрази сврзани со знак за неравенство прават **неравенство**. Значи, неравенства се

$A < B$ или $A \leq B$ или $A > B$ или $A \geq B$, A и B се изрази.

Примери за неравенства се:

$$3 < 7, 5 \geq 4 + 1, x < 2x - 1, y + x \leq -x + 8.$$

Ако двата изрази во неравенството се бројни изрази тогаш неравенството се вика **бројно неравенство**. Во претходниот пример, бројни неравенства се

$$3 < 7 \text{ и } 5 \geq 4 + 1.$$

Ако во неравенството има една или повеќе променливи тогаш неравенството се нарекува **линеарна неравенка**. Променливите во неравенката се викаат **непознати** и, најчесто, ги означуваме со $x, y, z, \dots$. Во горниот пример неравенки се

$$x < 2x - 1 \text{ и } y + x \leq -x + 8.$$

Множеството на допуштени вредности на променливите се нарекува **дефиниционо множество** на неравенката.

Со задавање на вредности на непознатите од дефиниционото множество на една неравенка, таа преминува во (бројно) неравенство. Ако при замената на непознатите за сите вредности од дефиниционото множество на неравенката, таа преминува во вистинито неравенство тогаш неравенката се нарекува **идентичка неравенка**.

Идентички неравенства се, на пример,

$$x+4 > x+3, (x+y)^2 \leq x^2 + 2xy + y^2.$$

Неравенка, која со замена на непознатите за сите вредности од нејзиното дефиниционо множество, преминува во невистинито неравенство, се нарекува **невозможна неравенка**.

Примери за невозможни неравенки се:

$$x^2 < 0, (x+y)^2 > x^2 + 2xy + y^2 + 100.$$

Според бројот на непознатите што ги содржи една неравенка таа може да биде: **неравенка со една непозната, неравенка со две непознати** итн.

Во претходните примери, неравенки со една непозната се:

$$x < 2x-1, x+4 > x+3, x+3 > x+4, x^2 < 0,$$

а со две непознати:

$$y+x \leq -x+8, (x+y)^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 \text{ и } (x+y)^2 > x^2 + 2xy + y^2 + 100.$$

Според најголемиот степен на непознатите, една неравенка може да биде **неравенка од прв степен** или **линеарна неравенка, неравенка од втор степен** или **квадратна неравенка, неравенка од трет степен** или **кубна неравенка** итн.

Неравенките

$$x < 2x-1, x+4 > x+3, x+3 > x+4, y+x \leq -x+8$$

се линеарни неравенки, а неравенките

$$x^2 > 5x+1, x^2 \geq 0, x^2 < 0, (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 100$$

се квадратни неравенки.

Во продолжение ќе се задржиме на линеарни неравенки со две непознати, специјално на неравенка од видот $ax+by < c$, каде $a, b, c \in \mathbb{R}$. Сите заклучоци за оваа неравенка ќе важат и во останатите три случаи $ax+by > c$, $ax+by \leq c$ или $ax+by \geq c$.

Решение на неравенката $ax+by < c$ е секој пар реални броеви (x_0, y_0) , за кој неравенството $ax_0+by_0 < c$ е вистинито бројно неравенство. Множеството од сите решенија на една неравенка се нарекува **множество решенија на неравенката**.

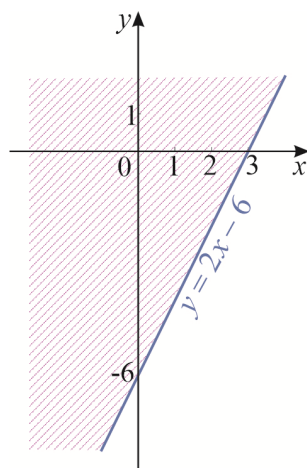
Секоја линеарна неравенка со две непознати е еквивалентна или со неравенка од вид $ax+by < c$ или со $ax+by \leq c$, каде што $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

Неравенката $ax+by < c$ е еквивалентна со неравенката $y < -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, ако $b > 0$ или со неравенката $y > -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, ако $b < 0$. Неравенката $ax+by \leq c$ е еквивалентна со неравенката $y \leq -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ или со неравенката $y \geq -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, во зависност од знакот на b .

Ако го замениме знакот $<$ ($>$, $\leq$ или $\geq$) во горните неравенки со знакот за еднаквост ($=$) ја добиваме равенката $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ која е равенка на права. Правата $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ во координатниот систем xOy ја дели координатната рамнина на две полурамнини. Множеството решенија на неравенката $ax + by < c$ се точките од едната од полурамнините определени со правата $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, не вклучувајќи ги точките од правата, додека множеството решенија на неравенката $ax + by \leq c$, освен точките од едната полурамнина определена од правата $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ ги вклучува и точките од правата. За да одредиме која полурамнина е бараното множество решенија, доволно е да земеме една (контролна) точка од едната полурамнина и да ја утврдиме вистинитосната вредност на бројното неравенство.

Пример 1. Да ја решиме неравенката $2x - y < 6$.

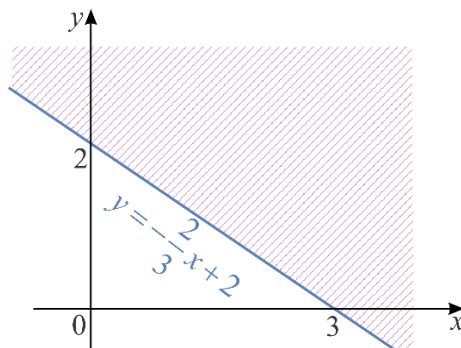
Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $y > 2x - 6$. Ја цртаме правата $y = 2x - 6$ во координатниот систем xOy . Точката $(0,0)$ лежи во едната од двете полурамнини. Со нејзина замена во неравенката се добива точно бројно неравенство, па заклучуваме дека множеството решенија на дадената неравенка е полурамнината, определена со правата $y = 2x - 6$, која што ја содржи $(0,0)$ без точките од правата. Велиме дека во множеството решенија лежат сите точки над правата $y = 2x - 6$. На цртеж 1 е прикажано множеството решенија на дадената неравенка.



Цртеж 1

Пример 2. Неравенката $2x + 3y \geq 6$ е еквивалентна со неравенката $y \geq -\frac{2}{3}x + 2$. Ја цртаме правата $y = -\frac{2}{3}x + 2$ во координатниот систем xOy . Бидејќи точката $(0,0)$ не е решение на дадената неравенка, множеството решенија на дадената неравенка е полурамнината, определена со правата $y = -\frac{2}{3}x + 2$, која што не ја содржи $(0,0)$ вклучувајќи ги и точките од правата. Велиме дека во

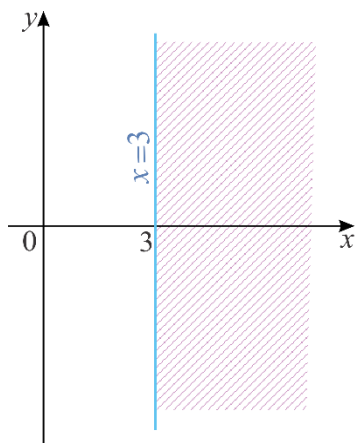
множеството решенија на неравенката лежат сите точки над правата $y = -\frac{2}{3}x + 2$. На цртеж 2, со шрафираниот дел е прикажано множеството решенија на дадената неравенка.



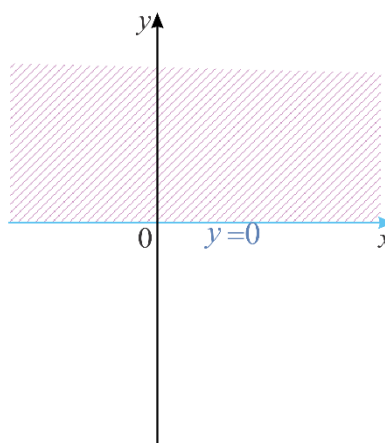
Цртеж 2

Пример 3. Да ја решиме неравенката $x + 0 \cdot y \geq 3$.

Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $x \geq 3$. Ја цртаме правата $x = 3$, која што е паралелна со y оската, во координатниот систем xOy . Бидејќи точката $(0,0)$ не е решение на дадената неравенка, множеството решенија на дадената неравенка е полурамнината, определена со правата $x = 3$, која што не ја содржи $(0,0)$ вклучувајќи ги и точките од правата. Велиме дека во множеството решенија на правата се наоѓаат сите точки десно од правата $x = 3$. На цртеж 3, со шрафираниот дел е прикажано множеството решенија на дадената неравенка.



Цртеж 3



Цртеж 4

Пример 4. Неравенката $0 \cdot x + y \geq 0$ е еквивалентна со неравенката $y \geq 0$. Ја цртаме правата $y = 0$ во координатниот систем xOy . Всушност, тоа е x оската. Бидејќи точката $(0,1)$ е решение на дадената неравенка, множеството решенија на дадената неравенка е полурамнината, определена со x оската, која што ја содржи $(0,1)$ вклучувајќи ги и точките од правата. Велиме дека во множеството решенија припаѓаат сите точки над правата $y = 0$ или над x -оската. На цртеж 4, со шрафираниот дел е прикажано множеството решенија на дадената неравенка.

Задачи

Реша ги следниве неравенки:

1. $x - y > 1$.

2. $\frac{x}{3} + 2y - 1 \geq 0$.

3. $4x < -2 + y$.

4. $x \leq -1$.

5. $y \leq 7$.

6. $\frac{1-x}{3} < \frac{2}{3}y - 4$.

7. $x + y \geq 1 - \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$.

8. $\frac{2-x+y^2}{y^2+4} > 1$.

2.3. Систем од две линеарни неравенки со две непознати

Да го разгледаме системот

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 > 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 > 0 \end{cases}$$

Се разбира, во системот можни се сите знаци за неравенство. Веќе видовме дека решението на секоја линеарна неравенка со две непознати е полурамнина, па решението на системот е пресек на тие полурамнини.

На решението на системот влијае заемната положба на правите

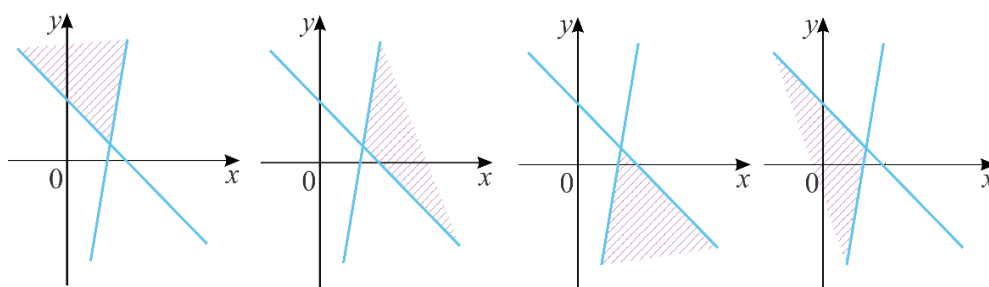
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ и } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Ако правите се сечат, тогаш системот изразен преку непознатата y може да има еден од следниве облици:

$$\begin{cases} y < k_1x + n_1 \\ y < k_2x + n_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y < k_1x + n_1 \\ y > k_2x + n_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y > k_1x + n_1 \\ y < k_2x + n_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y > k_1x + n_1 \\ y > k_2x + n_2 \end{cases},$$

каде $k_1 = -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} = k_2$.

Во овој случај системот секогаш има решение. Ова лесно може да се забележи на графичкиот приказ на системите на цртеж 1.



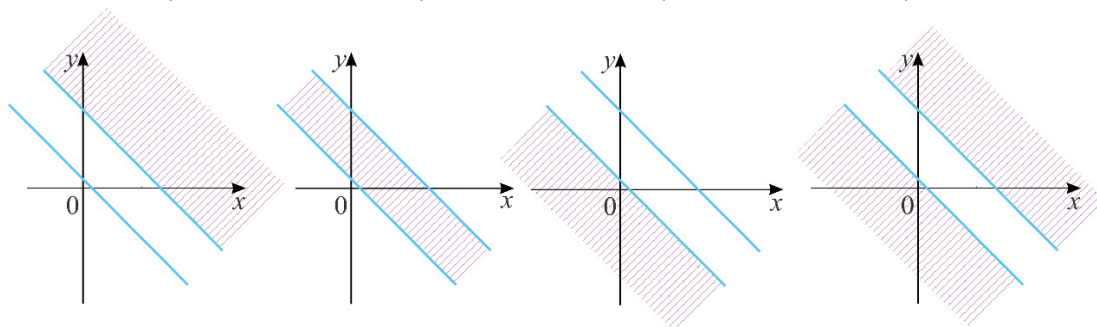
Цртеж 1

Ако, пак, правите $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ се паралелни, тогаш

$$k_1 = -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} = k_2, \text{ а системот изразен преку непознатата } y \text{ може да има еден}$$

од следниве облици:

$$\begin{cases} y < k_1x + n_1 \\ y < k_2x + n_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y < k_1x + n_1 \\ y > k_2x + n_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y > k_1x + n_1 \\ y < k_2x + n_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y > k_1x + n_1 \\ y > k_2x + n_2 \end{cases}.$$



Цртеж 2

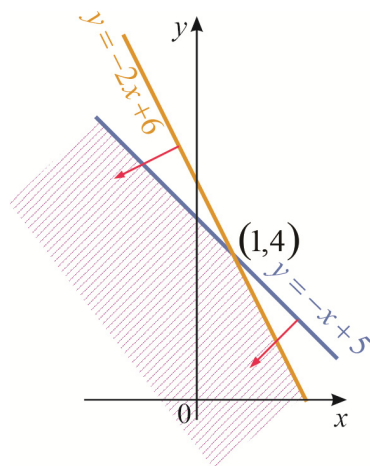
Системот нема решение ако кај паралелните прави множествата решенија немаат пресек. Графичкиот приказ на решението на системот во случај кога правите се паралелни е даден на цртеж 2.

Следуваат неколку примери за графичко решавање на системи линеарни неравенки со две непознати.

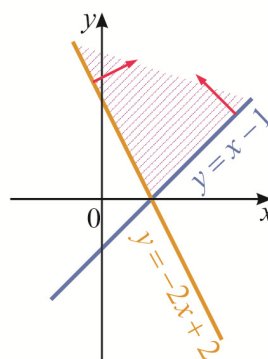
Пример 1. Системот $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + y < 6 \end{cases}$ е еквивалентен со системот $\begin{cases} y \leq -x + 5 \\ y < -2x + 6 \end{cases}$.

Множеството решенија на секоја од неравенките во системот го претставуваме графички во ист координатен систем. Полурамнините кои што се решенија на неравенките се означени со стрелки на правите кои ги определуваат. Потоа го определуваме нивниот пресек, којшто е воедно множеството решение на дадениот систем неравенки.

Шрафираниот дел на цртеж 3 е множеството решенија на дадениот систем неравенки (во кое припаѓаат само точките од полуправата од правата $y = -x + 5$ определена со точката $(1,4)$ и без неа).



Цртеж 3



Цртеж 4

Пример 2. Графички да го решиме го системот неравенки $\begin{cases} x - y \leq 1 \\ y \geq -2x + 2 \end{cases}$.

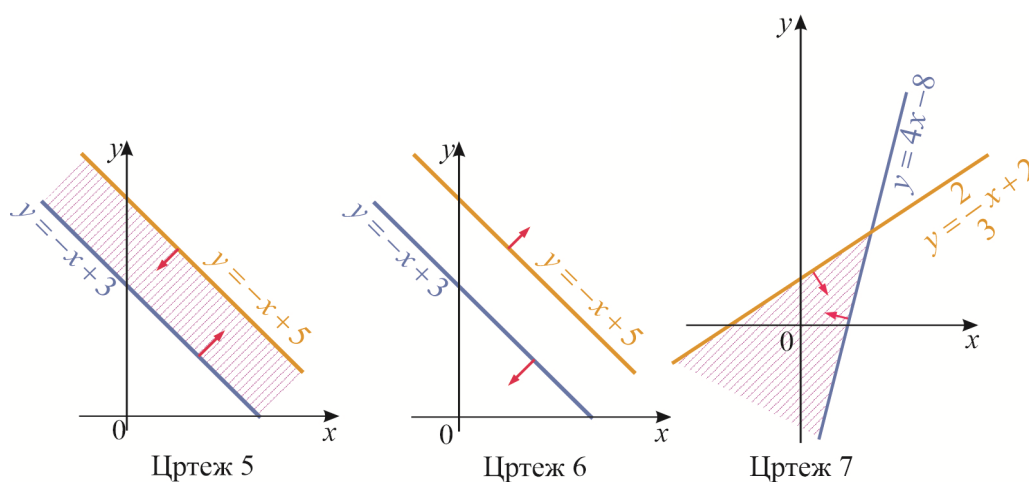
Дадениот систем неравенки е еквивалентен со системот $\begin{cases} y \geq x-1 \\ y \geq -2x+2 \end{cases}$.

Шрафраниот дел на цртеж 4 е бараното множество решенија (во кое припаѓаат и точките од полуправите).

Пример 3. Графички да го решиме го системот неравенки:

а) $\begin{cases} x+y \geq 3; \\ x+y \leq 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y \leq 3 \\ x+y \geq 5 \end{cases}$.

Шрафраниот дел на цртеж 5 е бараното множество решенија на системот неравенки под а) (во кое припаѓаат и точките од полуправите), додека множеството решенија на системот неравенки под б) е празното множество (цртеж 6).



Пример 4. Графички реши го системот неравенки $\begin{cases} 2x-3y \geq -6 \\ 4x-y \leq 8 \end{cases}$.

Шрафраниот дел на цртеж 7 е бараното множество решенија на системот неравенки (во кое припаѓаат и точките од отсечките).

Задачи

Графички реши ги системите линеарни неравенки со две непознати:

1. $\begin{cases} -x+y \geq 3 \\ y \geq 4x \end{cases}$
2. $\begin{cases} x-y \leq 1 \\ 2x-y \geq -1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+2y \leq 2 \\ x+2y \geq -2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x+y \geq 3 \\ x-2y \leq 3 \end{cases}$
5. $\begin{cases} -x+y \leq 4 \\ 2x+5y \leq 27 \end{cases}$

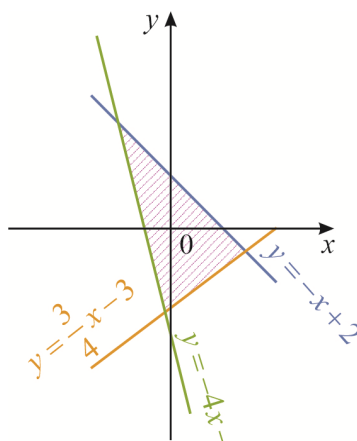
2.4. Графичко претставување на систем од повеќе линеарни неравенки со две непознати и примена

Графичко претставување на систем од повеќе линеарни неравенки со две непознати

Во случај кога имаме повеќе линеарни неравенки со две непознати системот го решаваме на ист начин како кога во системот има само две линеарни неравенки со две непознати.

Пример 1. Графичкото решение на системот
$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 3x - 4y \leq 12 \\ 4x + y \geq -4 \end{cases}$$
 се сите точки

од рамнината кои лежат внатре во триаголникот заедно со точките кои лежат на отсечките од правите (цртеж 1).



Цртеж 1

Пример 2. Графички да го решиме системот неравенки
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 4x - 3y \geq -6 \\ 4x - y \leq 8 \end{cases}$$

Точката $(0,0)$ ги исполнува условите на втората и третата неравенка, па шрафираниот дел на цртеж 2 а) е бараното множество решенија на системот неравенки (во кое припаѓаат и точките од отсечките).

Примена на систем од повеќе линеарни неравенки со две непознати

Многу често има потреба да одредиме најмала или најголема вредност на множеството решенија на некој систем линеарни неравенки со две непознати. За таа цел може да се користи графичкиот метод како во претходните примери.

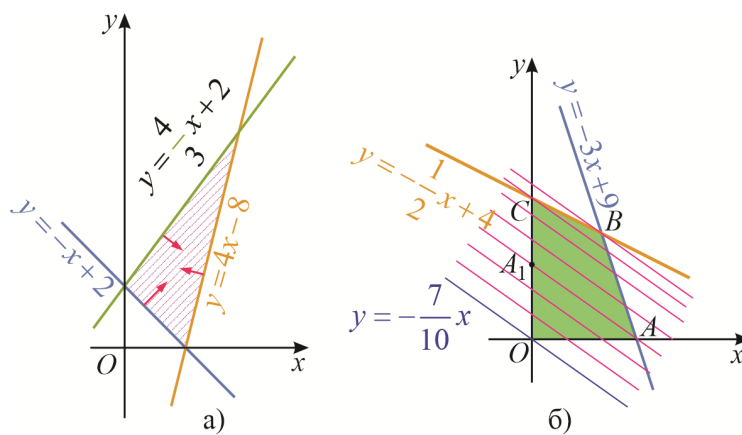
Пример 3. а) Да ја најдеме најголемата вредност на функцијата $z = 7x + 10y$ ако важат следниве услови

$$\begin{cases} 3x + y \leq 9 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Графички го решаваме системот линеарни неравенки со две непознати

$$\begin{cases} 3x + y \leq 9 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

и го добиваме решението претставено со четириаголникот $OABC$ (цртеж 2 б)) каде $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(2,3)$ и $C(0,4)$. Да ја разгледаме правата со равенка $7x + 10y = 0$, т.е. $y = -\frac{7}{10}x$. Таа минува низ темето O и нема други пресечни точки со четириаголникот $OABC$.



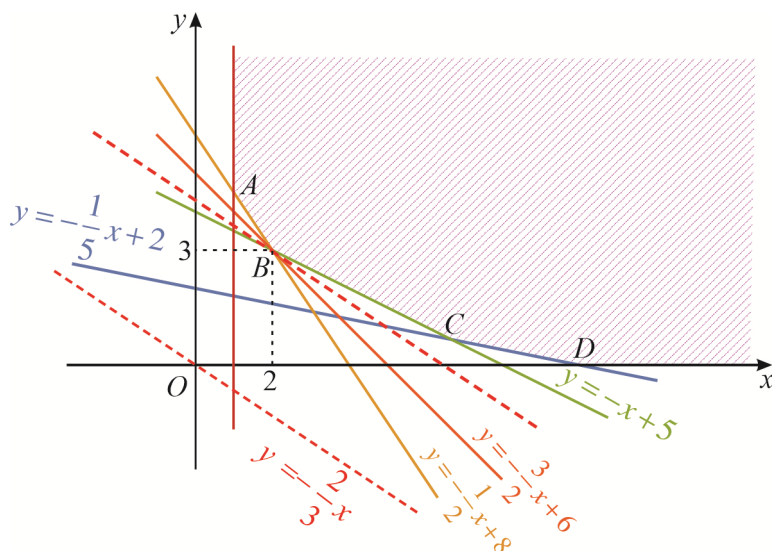
Цртеж 2

Сега, да ја поместуваме паралелно правата по позитивниот дел на y -оската. Значи се добиваат правите $7x + 10y = z$, и притоа со оддалечување на правата од координатниот почеток, вредноста на z се зголемува. Забележуваме дека во точките од пресекот на правата со четириаголникот $OABC$ вредноста на z е иста. Така на пример, ако правата ја поставиме во темето A вредноста на z во сите точки од отсечката AA_1 е иста, т.е. $z = 7 \cdot 3 + 10 \cdot 0 = 21$. Во темето C имаме $z = 7 \cdot 0 + 10 \cdot 4 = 40$ за сите точки од пресекот на правата $7x + 10y = 40$ со четириаголникот. Според тоа вредноста на z ќе биде најголема кога правата ќе стигне во темето B , и тогаш $z = 7 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 44$ и тоа е бараната најголема вредност на z и се достигнува за $x = 2$ и $y = 3$.

б) Да ја одредиме најмалата и најголемата вредност на $z = 2x + 3y$ во множеството решенија на системот

$$\begin{cases} x + 5y \geq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ 2x + 4y \geq 16 \\ 2x + 2y \geq 10 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Графичкото решение на системот е дадено на цртеж 3.



Цртеж 3

Аналогно како под а), најмалата вредност $z = 13$ се добива за $x = 2, y = 3$, а најголема вредност нема бидејќи множеството решенија на системот не е ограничено од горе.

Постои и друг метод на решавање систем линеарни неравенки со две непознати и кај него нема потреба од графичко претставување на множеството решенија. Тоа е методот на исклучување, каде од системот се исклучува едната од непознатите и така се одредува бараната најмала или најголема вредност.

Пример 4. Да ја одредиме ја најмалата вредност на $z = -2x - y$ на

$$\text{множеството решенија на системот } \begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x + y \geq 2 \\ x - y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Значи треба да одредиме за кои вредности на x и y ќе важи $z \geq -2x - y$. За таа цел сите неравенки во системот ги изразуваме преку x т.е. ја исклучуваме непозната y . Според тоа имаме

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x + y \geq 2 \\ x - y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 - 2y \\ x \geq 2 - y \\ x \geq 3 + y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - y \leq 6 - 2y \\ 3 + y \leq 6 - 2y \\ 0 \leq 6 - 2y \\ x \geq -\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 4 \\ y \leq 1 \\ y \leq 3 \\ 6 - 2y \geq -\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Од овие неравенки јасно е дека $0 \leq y \leq 1$ и $z \geq 3y - 12$. Последната неравенка има најмала вредност кога $y = 0$, па со замена во почетниот систем се добива

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 2 \\ x \geq 3 \\ x \geq 0 \\ 6 \leq x \end{cases}$$

од каде се заклучува дека $x = 6$. Значи најмалата вредност на $z = -12$ се добива за $x = 6, y = 0$.

Примена на систем од повеќе линеарни неравенки со две непознати во реалниот живот

Примената на решавањето систем линеарни неравенки со две непознати е распространета низ решавање разни проблеми од економијата и организација на производството, планирање на инвестиции, организирање транспорт, создавање прехранбени центри кои носат профит затоа што нуди одредување на најповолна состојба во која добивката се зголемува, а загубата се намалува.

Постапката со која преку запишување систем линеарни неравенки се бара одредена проценка на некоја најмала или најголема вредност се нарекува **линеарно програмирање**.

Пример 5. Една компанија произведува два типа еколошки возила за собирање смет. Компанијата има капацитет да произведува 70 возила дневно и има 120 часа ефективно работно време во текот на денот. Потребно време да се произведе возило од првиот тип е 1 час, а од вториот тип 3 часа. Добивката од првиот тип на возила е 40 евра, а од вториот тип 60 евра. Одреди ја максималната дневна добивка на компанијата, ако се смета дека сите возила се изработени и продадени.

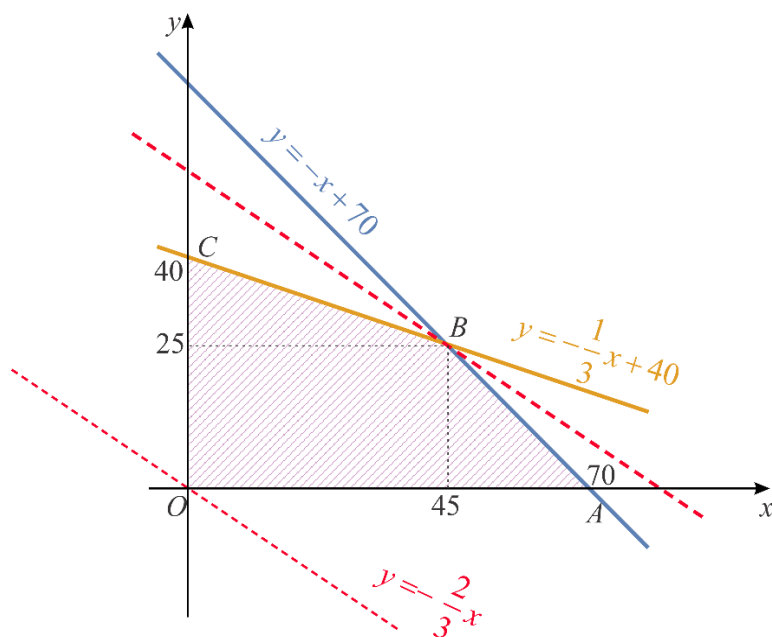
Ако го означиме со x бројот на возила од првиот тип, а со y бројот на возила од вториот тип, тогаш дневната добивка е $z = 40x + 60y$. Тоа значи дека треба да ја одредиме најголемата вредност на функцијата $z = 40x + 60y$, ако важат следните услови:

$$\begin{cases} x + y \leq 70 \\ x + 3y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Прво го одредуваме множеството решенија на системот неравенки (цртеж 3) кое може да го наречеме допустлива област. Во овој случај тоа е четириаголникот $OABC$ каде што $O(0,0)$, $A(70,0)$, $C(0,40)$. Координатите на темето B ги наоѓаме со решавање на системот

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x + 3y = 120 \end{cases},$$

односно $B(45,25)$. Во секое теме од областа ја пресметуваме вредноста на функцијата $z = 40x + 60y$ т.е. $z = 40 \cdot 45 + 60 \cdot 25 = 3300$.



Цртеж 4

Значи, максималната дневна добивка на компанијата е 3300 евра, а се добива со произведување на 45 возила од првиот тип и 25 возила од вториот тип.

Пример 6. Една компанија произведува два типа на производи X и Y , користејќи две машини A и B . Секој производ од типот X бара 50 минути време за обработка на машината A и 30 минути време за обработка на машината B . Секој производ од типот Y бара 24 минути време за обработка на машината A и 33 минути време за обработка на машината B .

На почетокот на тековната недела на залиха има 30 производи од типот X и 90 единични производи од типот Y . Достапното време на обработка на машината A се предвидува да биде 40 часа, а на машината B е предвидено да биде 35 часа.

Побарувачката на производи од типот X во тековната недела се предвидува да биде 75 производи, а за Y се предвидува да биде 95 производи. Политиката на компанијата е да се максимизира комбинираниот збир на производи од типот X и производи од типот Y на залиха на крајот на неделата. Да определиме колку производи од секој тип треба да се направат во текот на неделата.

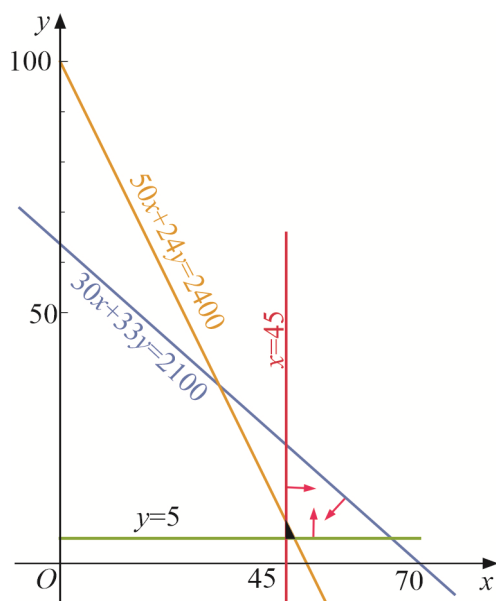
Нека x е бројот на производи од типот X произведени во тековната недела, и y е бројот на производи од типот Y произведени во тековната недела. Тогаш бројот на производи на залиха на крајот на неделата изнесува

$$z = (x + 30 - 75) + (y + 90 - 95) = x + y - 50.$$

Треба да ја одредиме најголемата вредност на функцијата $z = x + y - 50$ ако важат следните услови:

$$\begin{cases} 50x + 24y \leq 40 \cdot 60 = 2400 \\ 30x + 33y \leq 35 \cdot 60 = 2100 \\ x \geq 75 - 30 = 45 \\ y \geq 95 - 90 \end{cases}$$

Од цртеж 5 е јасно дека максимумот се јавува на пресекот на правите $x = 45$ и $50x + 24y = 2400$.



Цртеж 5

Со решавање, наместо со читање вредности од графикот, имаме дека $x = 45$ и $y = 6,25$ и $z = 1,25$.

Пример 7. Една компанија произведува две артикли X и Y . Ресурсите што се потребни за производство на X и Y се двојни, имено време на машината за автоматска обработка и време на мајсторот за рачна обработка. Табелата подолу го дава бројот на минути потребни за секоја ставка:

Производ	Време на машина	Време на мајстор
X	13	20
Y	19	29

Компанијата има во следната работна недела на располагање 40 часа време на машина и 35 часа време на мајстор. Времето на машината чини 10 евра од час, а времето на мајсторот чини 2 евра од час. Времето на мирување на машината и на мајсторот не прават трошоци. Приходот (целото производство се продава) е 20 евра за X и 30 евра за Y . Компанијата има договор за производство на 10 артикли X неделно за одреден клиент. Да го определиме неделниот обем на производство.

Нека x е бројот на артикли X и y да биде бројот на артикли Y . Тогаш неделниот обем на производство може да се запише како

$$z = 20x + 30y - 10 \cdot \text{работно време на машина} - 2 \cdot \text{работно време на мајстор}.$$

Тоа значи дека треба да ја одредиме најголемата вредност на функцијата z , ако важат следните услови:

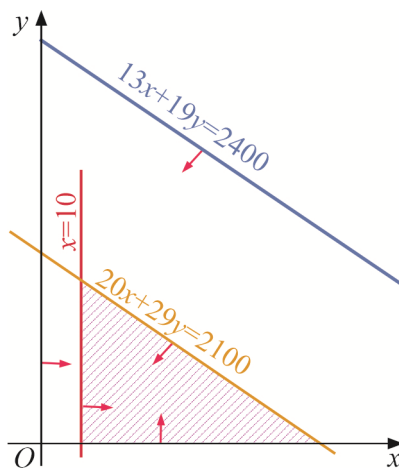
$$\begin{cases} 13x + 19y \leq 40 \cdot 60 \\ 20x + 29y \leq 35 \cdot 60 \\ x \geq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Тогаш имаме дека

$$z = 20x + 30y - 10(13x + 19y) - 2(20x + 29y) = 17,1667x + 25,8667y$$

под услови:

$$\begin{cases} 13x + 19y \leq 2400 \\ 20x + 29y \leq 2100 \\ x \geq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Цртеж 6

Со решавање, наместо со читање вредности од цртеж, имаме дека $x=10$ и $y=65,52$, а вредноста на $z=1866,5$ евра.

Задачи

1. Реши ги графички системите неравенки

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + 3y \geq 0 \\ x - 4y \geq -2 \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - 4y \geq 2 \\ x + 3y \geq -5 \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 3x + 4y \leq 7 \\ -5x - y \leq 3 \\ x - 2y \leq 4 \end{cases} \end{array}$$

2. Најди ја најмалата вредност на $z = 3x + y$ ако $\begin{cases} 4x + y \geq 11 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

3. Најди ја најголемата вредност на $z = x + 6y$ ако $\begin{cases} x + y \leq 7 \\ 2x + y \leq 12 \\ x + 3y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$

4. Поради недостаток на бор и флуор во организмот, лекарот го советува пациентот дека во следниот период дневно да внесува најмалку 60 μg бор и 150 μg флуор. Пациентот има на располагање два тоници A и B , цената е 5 евра или 3 евра за децилитар. Првиот тоник (во децилитри) содржи 2 μg бор и 8 μg флуор, а останатите 4 μg бор и 6 μg флуор. Колкаво количество тоници A и B треба да зема пациентот дневно да ја исполнат препораката на лекарот и тоа со минимални трошоци?

5. Компанијата произведува два вида мешавини за житарки, Премиум и Супер, со продажна цена од 9 евра и 7 евра за килограм. Единствените состојки во овие производи се јачменот и овесот. Достапни се 80 килограми јачмен и 100 килограми овес. За производство на еден килограм Премиум потребни се 600 грама јачмен, а за еден килограм Супер потребни 400 грама јачмен. Досегашното искуство покажува дека не може да се продаваат повеќе од 60 килограми Премиум. Колку Премиум треба да се направи, а колку Супер, за да се оствари најголем профит од продажбата?

6. Една текстилна фабрика произведува два типа панталони. За првиот тип панталони потребни се 10 минути за кроење и 20 минути за шиене. За вториот тип панталони потребни се 10 минути за кроење и 30 минути за шиене. Фабриката може да обезбеди најмногу 7500 минути на ден за кроење и најмногу 19500 минути за шиене. Заработката од еден пар од првиот тип панталони е 300 денари, а заработката од еден пар од вториот тип панталони е 375 денари. Колку пара панталони од двата типа треба да се произведат дневно за да се добие максимална добивка?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

Графички реши ги следниве линеарни равенки и линеарни неравенки со две непознати:

1. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} - 1 = 0$.

2. $x = -2 + 3y$.

3. $x + y \leq 3$.

4. $-\frac{x}{3} + y - 1 < 0$.

5. $y > 2$.

6. $x \leq 6$.

7. Графички реши ги системите:

a) $\begin{cases} 4x + y \geq 3 \\ x - 7y \leq 3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} -4x + y \leq 4 \\ -2x + 3y \leq 12 \end{cases}$.

8. Графички реши ги системите:

a) $\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ 4x - 8y \geq -6 \\ 4x - y > 4 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} -3x - y < 2 \\ x - y < 10 \\ 4x - 3y > 4 \end{cases}$.

Графички реши ги системите линеарни неравенки:

9. $\begin{cases} -x + y \geq -1 \\ x + y < 4 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - y \leq 2 \\ 4x + 3y \leq 12 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 9x + 2y \leq 27 \\ y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

13. Најди ја најмалата вредност на $z = 7x + 6y$ ако
$$\begin{cases} 5x + 2y \geq 16 \\ 3x + 7y \geq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

14. Најди ја најголемата вредност на $z = 6x + 3y$ ако
$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 9x + 2y \leq 27 \\ y \leq 5 \\ x \geq 0. \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

15. Најди ја најмалата вредност на $z = 3x_1 + 8x_2$ ако
$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 \geq 50 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

16. Најди ја најголемата и најмалата вредност на функцијата $z = 5x + 7y$ ако важат следниве услови

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 3x - y \leq 15 \\ -x + y \leq 4 \\ 2x + 5y \leq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

17. Најди ја најголемата и најмалата вредност на функцијата $z = x + 3y$ ако важат следниве услови

$$\begin{cases} 3x + y \geq 45 \\ x + 2y \geq 50 \\ x + y \leq 35 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

18. Една златарница произведува белегии и ќердани. Златарницата дневно може да произведе најмногу 24 парчиња белегии и ќердани, заедно. За изработка на една белегија потребен е 1 час, а за изработка на еден ќердан потребно е $\frac{1}{2}$ час. Златарницата работи 16 часа дневно. Ако заработката од една белегија е 2 евра, а заработката од еден ќердан е 1 евро, колкава е максималната заработка?

19. Еден рибник е порибен со два вида риба, крап и пастрмка. Сопственикот ги храни рибите со два типа храна. За крапот треба 2 единици од храната од првиот тип и 4 единици од храната од вториот тип. За пастрмката треба 5 единици од храната од првиот тип, а 2 единици од храната од вториот тип. Ако сопственикот има 800 единици од секој тип храна, најди го максималниот број на риби со кои што езерото може да се пориби.

3. СЛОЖЕНА КАМАТНА СМЕТКА

3.1. Поим за сложена камата

Пред да се запознаеме со сложена каматна сметка, да се потсетиме на некои од основните задачи кои се однесуваат на проста каматна сметка.

Позајмувањето пари е нужна трансакција со која често се среќаваме во секојдневниот живот. Заемопримачот може да ги искористи парите за да оствари добивка која што заемодавачот не е во можност да ја оствари, додека тој за сметка на тоа добива надомест за позајмените пари, наречен **камата**. Банките плаќаат камата на физички лица и компании кои своите пари ги депонираат на банкарските сметки, и обратно тие плаќаат камати на банките кога од нив позајмуваат определена сума пари.

Висината на вложената или позајмената сума пари, односно сумата на која се пресметува каматата се нарекува **главнина**.

Периодот за кој треба да се врати позајмената сума пари се нарекува **времетраење на заемот**. Вообичаено е овој период да се мери во единиците денови, месеци или години.

Висината на каматата што се остварува за единица време е пропорционална со главнината, односно претставува некој процент од главнината, и се нарекува **каматна стапка**. Според тоа, каматната стапка е процентната стапка сврзана за определен временски период. Затоа, висината на каматата не зависи само од главнината, туку и од времетраењето на заемот.

Да ја означиме каматата со K , главнината со G , времетраењето на заемот со t и каматната стапка со p .

Пример 1. Колкава камата се добива од 3200 евра после 5 години, ако тие се ставени во банка и на нив се пресметува 3% годишна каматна стапка?

Со помош на формулата $K = p \cdot G \cdot t$, каде главнината или капиталот $G = 3200$ евра, каматната стапка $p = \frac{3}{100} = 0,03$ и времето $t = 5$ се добива камата $K = 0,03 \cdot 3200 \cdot 5 = 480$ евра.

Се наметнува прашањето: Колкава камата ќе добиеме, ако за 5 години истата сума се орачи така што после секоја година каматата се додава на капиталот и така се добива нов капитал?

После првата година каматата изнесува $K_1 = 0,03 \cdot 3200 \cdot 1 = 96$ евра. Капиталот за втората година сега е $G_1 = G + K_1 = 3200 + 96 = 3296$ евра. Каматата на крајот на втората година ќе изнесува $K_2 = 0,03 \cdot 3296 = 98,88$ евра. На почетокот на третата година капиталот изнесува $G_2 = G_1 + K_2 = 3296 + 98,88 = 3394,88$ евра, а на крајот каматата изнесува $K_3 = 0,03 \cdot 3394,88 \approx 101,85$. Аналогно, имаме дека $G_3 = 3496,73$, $K_4 \approx 105$, $G_4 = 3601,73$ и $K_5 = 108$. Конечно на крајот на петтата година капиталот изнесува $G_4 = G_3 + K_4 = 3601,73 + 108 = 3709,73$ евра, а каматата изнесува $G_5 - G_1 = 3709,73 - 3200 = 509,73$ евра. Забележуваме дека при ваков начин на пресметување на камата се добива сума која е поголема од првиот начин на пресметување.

Ако каматата се додава на почетниот капитал, а потоа повторно се пресметува камата на новиот капитал, тогаш велиме дека пресметуваме камата со помош на **сложена каматна сметка**. Во оваа модулarna единица, ако поинаку не е нагласено, под каматна сметка ќе подразбираме сложена каматна сметка.

Постапката со која на почетниот капитал додаваме средства добиени како камата се нарекува **вкаматување**.

Формирањето на нов капитал од почетниот на крајот на една година со додавање камата се вика **годишна капитализација** или **годишно вкаматување**. Ако каматата се пресметува на половина година и се додава на почетниот капитал, тогаш станува збор за **полугодишна капитализација**. Временскиот период за кој се пресметува каматата може да биде и покус т.е. постои **тримесечна (квартална) капитализација, месечна капитализација** и слично. Може да речеме дека постојат различни периоди на вкаматување (годишно, семестрално, квартално, месечно...).

Поради постоењето различни периоди на вкаматување, воведени се и различни начини на запишување, имено

- ако вкаматувањето е годишно ставаме (pa) (скратено од per annum)
- ако вкаматувањето е полугодишно или семестрално ставаме (ps) (скратено од per semestre)
- ако вкаматувањето е тримесечно ставаме (pq) (скратено од per quartale)
- ако вкаматувањето е месечно ставаме (pm) (скратено од per mensem)

Времето t за кое се пресметува сложената камата мора да се изрази со исти временски единици, па затоа ако времето е 1 година и 6 месеци, тогаш при годишно вкаматување ќе велиме дека имаме $t = 1,5$ периоди, а при полугодишно вкаматување имаме 3 периоди.

Каматата може да се пресмета на два начини: **декурзивен** или **антиципативен**. Кога се пресметува декурзивно, тогаш каматата се пресметува на крајот на периодот, а кај антиципативното каматите се пресметуваат на почетокот на периодот.

Пример 2. Да одредиме колкава сума се добива од 20000 денари, со 2% декурзивна полугодишна капитализација после две години.

Ги воведуваме ознаките:

$$G_1 = 20000 \text{ денари}, p = \frac{2}{100} = 0,02.$$

После првата половина од годината се добива

$G_2 = G_1 + K_1 = 20000 + 0,02 \cdot 20000 = 20400$ денари, а на крајот на првата година $G_2 = 20808$ денари. Слично, $G_3 = 21224,16$ денари и $G_4 = 21648,64$ денари.

Пример 3. Познато е дека со декурзивна годишна капитализација од 5% после 2 години се добиени 25720 денари. Да ја одредиме висината на почетниот капитал.

Ако со x ја означиме сумата која се добила после првата година, тогаш $x + 0,05 \cdot x = 25720$ од каде $x = \frac{25720}{1,05} = 24495,24$ денари. Ако со y ја означиме висината на почетниот капитал, тогаш $y + 0,05 \cdot y = 24495,24$, од каде што добиваме дека $y = \frac{24495,24}{1,05} = 23328,8$ денари.

Пример 4. Една банка дозволила заем од 1000 евра, со 4% (ра). Ќе направиме споредба меѓу декурзивно и антиципативно пресметување на каматата.

При декурзивниот начин на пресметување на заемот од 1000 евра се додава камата од $\frac{4}{100} \cdot 1000 = 40$ евра, па таа додадена на почетниот капитал изнесува 1040 евра. Ова значи дека банката дава заем од 1000 евра и на крајот од една година, очекува повраток на 1040 евра. При антиципативен начин, од заемот од 1000 евра се одзема каматата од 40 евра и се добиваат 960 евра. Во овој случај, банката исплаќа 960 евра како заем, а после една година очекува повраток од 1000 евра.

Од примерот јасно се гледа дека антиципативниот начин на вкаматување е понеповолен за корисникот на заемот, зашто тој плаќа камата и на сума која не ја зел од банката. Со цел висината на заемот да биде иста, а не помала, треба да се исплати камата од 4% и на тие 40 евра кои недостигаат на почетокот. Конечно на крајот на вкаматувањето од една година, за заем од 1000 евра, треба да се вратат како камата $40 + \frac{4}{100} \cdot 40 = 41,6$ евра.

Затоа покрај информацијата за периодот на вкаматување постои и информација за начинот на пресметување на каматата, па 7% (ра) значи дека годишното вкаматување од 7% ќе се пресмета декурзивно, а 6,5% (ps)а дека полугодишното вкаматување ќе се пресмета антиципативно.

Во сите следни задачи ќе сметаме дека каматата се пресметува декурзивно. За да преминеме од антиципативен на декурзивен начин на пресметување на каматата ќе ја користиме формулата $p = \frac{100 \cdot q}{100 - q}$, каде p е процентот на

декурзивно, а q е процентот на антиципативно вкаматување. До оваа формула се доаѓа со изедначување на каматите кои треба да се исплатат при двата начини на вкаматување. Ако капиталот го означиме со G , тогаш при декурзивниот начин на вкаматување имаме $G_1 = G + \frac{p}{100} \cdot G = G \left(1 + \frac{p}{100} \right)$, а при антиципативен

начин $G = G_1 - \frac{q}{100} G_1 = G_1 \left(1 - \frac{q}{100} \right)$, од каде $G_1 = \frac{G}{1 - \frac{q}{100}}$, па со изедначување се

$$\text{добива } G \left(1 + \frac{p}{100} \right) = \frac{G}{1 - \frac{q}{100}} \text{ т.е. } 1 + \frac{p}{100} = \frac{1}{1 - \frac{q}{100}}.$$

Задачи

1. Ако претпоставиме дека некој вложил сума од 2800 евра во банка со годишна каматна стапка од 6,5%. Одреди колкава ќе стане сумата и камата после 5 години, ако вкаматувањето е годишно и декурзивно.

2. Која сума ќе се добие ако се вложат 51400 денари за 8 години со декурзивна годишна камата 6%, ако вкаматувањето е годишно.

3. Одреди колкава сума е вложена во банка, ако после 2 години со декурзивно годишно вкаматување од 3% исплатени се 27500 денари.

4. Претвори ја во декурзивна, антиципативната камата од 7%.

5. Претвори ја во антиципативна, декурзивната камата од 6%.

6. Еден ист износ на кредит може да се користи од две банки. Првата банка одобрува кредит со декурзивна годишна камата 6%, додека втората банка со антиципативна годишна камата 5,5%. Која банка кредитира поповолно, ако рокот за враќање на кредитот е една година.

3.2. Формула за пресметување на сложена камата

Да се навратиме на чекорите кои ги вршиме кога пресметуваме сложена камата. Да го означиме почетниот капитал со G_0 . Тогаш после одредено време t тој капитал станал

$$G_1 = G_0 + \frac{p}{100} G_0 = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right).$$

Во следниот период тој капитал е $G_2 = G_1 + \frac{p}{100} G_1 = G_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$. Со замена на G_1 во последното равенство се добива

$$G_2 = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right) = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2.$$

После одреден број периоди n кои се добиваат од времето t , капиталот ќе изнесува

$$G_n = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n.$$

Ако ставиме смена $r = 1 + \frac{p}{100}$, тогаш $G_n = G_0 r^n$.

Бројот r се нарекува **декурзивен каматен фактор** и ако замениме $G_0 = 1$ и $n = 1$, тогаш $r = G_1$, што значи дека тој број ни покажува за еден период со каматна стапка p колку нараснала вредноста на една парична единица.

На овој начин се добива формулата со која се одредува сложена камата, каде G_0 е почетниот капитал, r е декурзивниот фактор и n е бројот на периоди.

Пример 1. Сума од 35000 денари со годишно вкаматување за 4 години станала 47441 денари. Да ја одредиме вредноста на декурзивната годишна камата.

Познато е дека $G_0 = 35000$ денари, $n = 4$ години и $G_4 = 47441$ денари. Со замена во формулата за сложена камата $G_4 = G_0 r^4$ се добива $r^4 = \frac{G_4}{G_0}$ т.е.

$r^4 = 1,355457143$. По коренување се добива $r = 1,079$. Од формулата $r = 1 + \frac{p}{100}$ се добива $p = 100(r - 1)$ т.е. $p = 7,9\%$.

Може да изведеме и директна формула со чија помош ќе одредуваме големина на каматната стапка т.е.

$$p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right).$$

Пример 2. Капиталот 3256800 денари е вложен со камата од 5% (pa)d. На колку години е извршено вкаматувањето, ако е добиена сума од 7420000 ?

Според дадените податоци со замена во формулата за сложена камата се добива $7420000 = 3256800r^n$, па $r^n = 2,2783$, а од $r = 1 + \frac{p}{100}$ имаме дека

$$r = \frac{105}{100} = 1,05. \text{ Значи } 1,05^n = 2,2783. \text{ Според тоа } n = \log_{1,05} 2,2783 \text{ т.е.}$$

$$n = \frac{\lg 2,2783}{\lg 1,05} \approx 16,88 \text{ години.}$$

Може да изведеме и директна формула со која може да се пресмета периодот т.е.

$$n = \frac{\lg G_n - \lg G_0}{\lg r}, \text{ каде } r = 1 + \frac{p}{100} \text{ е декурзивен каматен фактор.}$$

Може во различен период да се промени висината на каматната стапка при вкаматувањето.

Пример 3. Капитал од 15000 евра е вложен во банка. Да ја најдеме висината на капиталот после 5 години, ако првите две години каматната стапка изнесува 5% (pa)d, а следните три години изнесува 5,5% (pa)d.

Од условот следува дека $G_0 = 15000$ евра, $n_1 = 2$, $p_1 = 5\%$, $n_2 = 3$, $p_2 = 5,5\%$, а треба да се одреди G_5 . Од формулата за сложена камата се добива дека $G_5 = G_0 r_1^{n_1} r_2^{n_2}$, каде $r_1 = 1 + \frac{p_1}{100} = \frac{105}{100} = 1,05$, $r_2 = 1 + \frac{p_2}{100} = 1,055$. Значи $G_5 = 15000 \cdot 1,05^2 \cdot 1,055^3 = 19419,02$ евра.

Задачи

1. Пресметај ја вредноста на декурзивната годишна камата, ако сума од 120000 денари со декурзивно годишно вкаматување за 6 години станала 170200 денари.

2. Пресметај ја вредноста на декурзивната годишна камата, ако сума од 560 евра со годишно вкаматување за 10 години нараснала за 50 евра.

3. Капиталот 15678 денари е вложен со камата од 7% (pa)d. На колку години е извршено вкаматувањето, ако тоа е годишно и декурзивно и добиена е сума од 19345 денари?

4. Сума од 180000 денари е вложена со камата од 7% (pa)d. После колку години ќе се добие сума од 200000 денари?

5. Пресметај колку се зголемил капиталот од 150000 денари за време од 3 години, ако првата година каматната стапка е 3%, втората 4% и третата година 5%. Вкаматувањето е годишно и декурзивно.

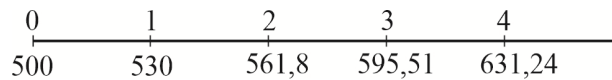
6. На колку ќе нарасне сума од 100000 денари вложена во банка на 3 години, ако првата година каматната стапка е $2\%(pa)d$, втората година $3\%(pa)d$, а третата година $2,5\%(pa)d$?

3.3. Примена на сложена камата

Како што забележавме низ сите претходни примери, освен начинот на пресметување на каматата, важен фактор при овој начин на пресметување е и периодот на вкаматување.

Пример 1. Колку ќе изнесува сумата од 500 евра вложена во банка после 2 години со камата од $6\% (ps)d$?

Познато е дека $G_0 = 500$, $p = 6\%$, $n = 2 \cdot 2 = 4$ периоди, па од формулата за сложена камата имаме $G_4 = G_0 \cdot r^4$, т.е. $500 \cdot 1,06^{10} = 631,24$ денари (цртеж 1).



Цртеж 1

Често во пракса времето не е исто со бројот на вкаматувања, туку се појавува некоја отстапка изразена во број на месеци или денови.

Пример 2. Одредено вкаматување трае 3 години и 9 месеци. Да го одредиме бројот на периоди n ако вкаматувањето е полугодишно.

Во 3 години и 6 месеци има 7 периоди, а преостанатите 3 месеци се половина од вкаматувањето, па ако со t го означиме времето, тогаш $t = n + s$, каде s е тој дел од вкаматувањето кој не е цел дел од периодот. Во овој случај $t = 7 + \frac{1}{2}$.

Во ваков случај вкаматувањето се пресметува така што прво се пресметува сложена камата за целиот број периоди, а потоа на таа добиена сума се одредува проста камата за преостанатото време.

Пример 3. Ќе ја одредиме висината на зголемувањето на капиталот од 5000 денари вкаматен со каматна стапка од 5% за време од 5 години и 6 месеци, ако вкаматувањето е годишно и декурзивно.

Бидејќи $t = 5 + \frac{1}{2}$, прво ќе пресметаме $G_5 = 5000 \cdot 1,05^5$. Потоа на оваа сума одредуваме проста камата $\frac{G_5 \cdot 5 \cdot 0,5}{100}$. Конечно се добива дека

$$G_t = G_5 + \frac{G_5 \cdot 5 \cdot 0,5}{100} = G_5 \left(1 + \frac{5 \cdot 0,5}{100} \right) \text{ т.е. } G_t = 5000 \cdot 1,05^5 \cdot 1,025 = 6541 \text{ денари.}$$

Според тоа, формулата со која ќе ја одредиме сложената камата кога времето не е цел број т.е. $t = n + s$, каде n е бројот на периоди, а s е времето кое е еден дел од период е $G_t = G_0 r^n \left(1 + \frac{p \cdot s}{100} \right)$.

Во пракса, често вкаматувањето се врши неколку пати во текот на годината. Потребно е да извршиме соодветно менување на формулата за сложена каматна сметка. Во секоја задача е познат периодот на вкаматување и каматната стапка за тој период се нарекува **номинална каматна стапка**, а ако вкаматувањето се врши за делови од тој период, тогаш каматната стапка е **релативна**. Таа се добива како количник од номиналната и бројот на деловите на кои се однесува т.е. ако номиналната камата $p\%$ е годишна, тогаш релативната полугодишна камата е $\left(\frac{p}{2}\right)\%$. Ова значи и дека ако номиналната месечна камата е $p\%$, тогаш релативната годишна камата е $(12 \cdot p)\%$.

Пример 4. Одреди колкав ќе биде капиталот од 50000 денари, после 5 години со 6% (pa)d ако вкаматувањето е:

а) годишно **б)** полугодишно **в)** квартално.

Имаме:

$$\text{а) } G_0 = 50000, n = 5, r = 1 + \frac{6}{100} = 1,06, \text{ па } G_5 = 50000 \cdot 1,06^5 = 66911,3 \text{ денари,}$$

$$\text{б) } G_0 = 50000, n = 10, r = 1 + \frac{6}{100} = 1,03, \text{ па } G_{10} = 50000 \cdot 1,03^{10} = 67195,8$$

денари,

$$\text{в) } G_0 = 50000, n = 20, r = 1 + \frac{6}{100} = 1,015, \text{ па } G_{20} = 50000 \cdot 1,015^{20} = 67342,75$$

денари.

Задачи

1. Колку ќе изнесува сумата од 2000 денари вложена во банка после 10 години со камата од 3% (ps)d ?

2. Сумата од 10000 евра е вложена во банка со годишно вкаматување и каматна стапка 2% (pa)d. Одреди ја висината на капиталот после 12 години и 5 месеци.

3. За колку ќе нарасне сума од 1000000 денари, после 7 години со 8% (pa)d ако вкаматувањето е квартално?

4. Пресметај ја декурзивната годишна каматна стапка со која сума од 150000 евра ќе нарасне на 250000 евра со полугодишно вкаматување.

5. На која сума ќе нараснат 780000 денари за период од 10 години со 6% (pa)d, ако вкаматувањето е месечно?

6. Во 2020 година во банка е вложена сума од 10000 евра со каматна стапка од 8% (pa)d. Колкав износ ќе има таа сума во 2030 година со:

- а)** годишно вкаматување **б)** семестрално вкаматување
в) квартално вкаматување?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Ако претпоставиме дека некој вложил сума од 4000 евра во банка со годишна каматна стапка од 8%. Одреди колкава ќе стане сумата и камата после 2 години, ако вкаматувањето е сложено, годишно и декурзивно.
2. Одреди колкава сума е вложена во банка, ако после 3 години со годишно вкаматување од 1% исплатени се 10000 денари.
3. Претвори ја во декурзивна, антиципативната камата од 10%.
4. Сумата од 12750 денари со годишно вкаматување за 3 години станала 24200 денари. Одреди ја вредноста на годишната камата, ако станува збор за декурзивно вкаматување.
5. Капиталот 1300 евра е вложен со камата од 7% (pa)d. На колку години е извршено вкаматувањето, ако тоа е годишно и декурзивно и добиена е сума од 1700 денари?
6. Пресметај колку се зголемил капиталот од 1000 денари за време од 8 години, ако првите две години каматната стапка е 5%, третата, четвртата и петтата година е 6% и останатите години е 7%. Вкаматувањето е годишно и декурзивно.
7. Колку ќе изнесува сумата од 3000 денари вложена во банка после 5 години со камата од 4% (ps)d ?
8. Сумата од 10000 евра е вложена во банка со годишно вкаматување и каматна стапка 5% (pa)d. Одреди ја висината на капиталот после 10 години и 7 месеци.
9. Во банка е вложена сума од 100000 денари со каматна стапка од 3% (pa)d. Колкав износ ќе има таа сума за 20 години со:

а) годишно вкаматување	б) семестрално вкаматување
в) квартално вкаматување	г) месечно вкаматување?
10. Вложени се 10000 денари со 10% годишна каматна стапка. Колкава вредност ќе достигне тој влог после 5 години со вкаматување кое е годишно и декурзивно?
11. Вкаматувањето е годишно и декурзивно, а банката има годишна каматна стапка од 10%. Колкав ќе биде капиталот од 15000 евра, после 3 години?
12. Еден милион денари се вложени во банка три години со четири проценти годишна каматна стапка. Колку изнесува разликата од вкаматувањето со сложена и проста каматна сметка?
13. Капитал од 2500 евра, за една година со декурзивно годишно вкаматување, носи камата од 150 евра пресметана со проста каматна сметка. Колкава камата ќе донесе истиот капитал, за истото време и со истата каматна стапка, пресметана со сложена каматна сметка?
14. За колку години капиталот од 50000 евра со декурзивно семестрално вкаматување со каматна стапка од 9% ќе има иста вредност како и капитал од 60000 евра со квартално вкаматување од 6%, ако се пресметува релативна камата?

4. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

4.1. Математичка индукција

Множеството природни броеви е подредено со „<“, т.е. со „≤“ на следниов начин:

$n < m$ ако и само ако $m - n$ е природен број, и

$n \leq m$ ако и само ако $m - n$ е природен број или нула.

Подредувањето „<“ се нарекува **строго подредување на природните броеви**, а „≤“ се нарекува **добро** (или **линеарно**) **подредување** на множеството природни броеви. Во „≤“ секои два природни броеви се споредливи.

Така имаме $1 < 2 < 3 < \dots$, т.е. $1 \leq 2 \leq 3 \leq \dots$. Но $1 \leq 1$ и $1 \not\leq 1$.

Поимот „индукција“ означува носење заклучок „од посебното кон општото“. Освен во секојдневниот живот, туку и во сите други науки, кога со разгледување на некое својство кое е точно во повеќе случаи, се доаѓа до претпоставка дека тоа својство е точно во сите случаи. За докажување дека такво својство е точно во сите случаи, најчесто се користи математичка индукција. Но, честото пати во математиката, една законитост може да е проверена за поголем број случаи, но тоа не значи дека таа е точна во секој случај.

Да ги разгледаме првите членови на низата броеви чијшто општ член е $a_n = n^2 - n + 41$. Тоа се броевите $a_1 = 41$, $a_2 = 43$, $a_3 = 47$, $a_4 = 53$, $a_5 = 61$, $a_6 = 71$, $a_7 = 83$, $a_8 = 97$. Забележуваме дека сите тие се прости броеви. Ова може да не наведе да претпоставиме дека сите членови од оваа низа се прости броеви. Можеме да провериме дека сите членови до $a_{40} = 1601$ се прости броеви. Но, тоа не значи дека сите членови на таа низа се прости броеви. Четириесет и првиот член е $a_{41} = 41 \cdot 41$, а тој не е прост.

Значи, една законитост ако е проверена за поголем број случаи, не значи дека е докажана, но може да биде претпоставка дека таа секогаш е точна.

Пример 1. Да запишеме неколку членови од низата, чиј општ член е:

$$a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1).$$

$$a_1 = 1 = 1^2$$

$$a_2 = 1 + 3 = 2^2$$

$$a_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2.$$

Забележуваме дека n -тиот член е квадрат од n . Затоа претпоставуваме дека општиот член на оваа низа е $a_n = n^2$, односно збирот на првите n непарни броеви $a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$ е еднаков на n^2 .

Со помош на математичка индукција (која е едно од основните својства на множеството природни броеви) ќе докажеме дека тврдењето е точно за секој природен број n .

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за сите $n \leq k$, односно $a_k = k^2$.

Тогаш за $n = k + 1$, $a_{k+1} = a_k + (2k + 1) \stackrel{u.n.}{=} k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, односно тврдењето е точно и за $n = k + 1$.

Разгледуваниот начин на докажување на претходното својство е основата на **принципот на математичката индукција (ПМИ)** кој се искажува на следниов начин:

Нека $T(n)$ е тврдење кое зависи од природниот број n . Ако:

1) тврдењето $T(n)$ е точно за $n = 1$ и

2) од индуктивната претпоставка дека $T(k)$ е точно, може да се докаже дека и $T(k + 1)$ е точно;

тогаш следува дека тврдењето $T(n)$ е точно за секој природен број n .

Пример 2. Докажи дека за секој природен број n е точно равенството:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Ќе го користиме принципот на математичка индукција:

1) за $n = 1$ имаме: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, што значи дека тврдењето е точно за $n = 1$;

2) претпоставуваме дека равенството е точно за $n = k$, односно

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1) \cdot (2k+1)}{6}.$$

Ќе докажеме дека равенството е точно и за $n = k + 1$, односно дека:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(k+1+1) \cdot (2(k+1)+1)}{6} = \\ &= \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Имаме дека

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &\stackrel{u.n.}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= (k+1) \frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = \\ &= (k+1) \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Од принципот на математичката индукција следува дека равенството е точно за секој природен број n .

Пример 3. Најди го збирот $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$, за секој природен број n .

За да го најдеме изразот со кој се пресметува S_n , за секое n , првин ќе најдеме неколку збира:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

Од запишаните неколку збира можеме да уочиме дека се добиваат дропки чиј броител е збир од броителите на собирците, а именителот е за еден поголем од броителот.

Претпоставуваме дека $S_n = \frac{n}{n+1}$, за секој природен број n .

За да ја провериме точноста на равенството $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ќе

го користиме принципот на математичката индукција.

- 1) За $n=1$ равенството е точно
- 2) Претпоставуваме дека е точно за $n=k$, односно:

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Ќе докажеме дека е точно и за $n=k+1$, односно:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Навистина:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \stackrel{u.n.}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Значи, според принципот на математичката индукција, може да заклучиме дека равенството $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ е точно за секој природен број n .

Задачи

Докажи дека равенствата во задачите од 1 до 4 се точни за секој природен број n .

$$1. \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

$$2. \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

$$3. \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

$$4. \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

4.2. Примена на ПМИ при докажување идентитети

Понекогаш при докажувањето идентитети треба да се направат дополнителни трансформации, а потоа да се искористи индуктивната претпоставка. Следуваат неколку примери во кои се покажува примената на ПМИ.

Пример 1. Докажи дека збирот на сите внатрешни агли во n -аголник се пресметува со формулата $S_n = (n-2) \cdot 180^0$.

Доказот ќе го извршиме со математичка индукција.

1) Јасно е дека првиот чекор е проверка дали ова тврдење важи за $n=3$, затоа што триаголникот е најмалиот многуаголник. Збирот на внатрешните агли во триаголникот е $180^0 = (3-2) \cdot 180^0$.

2) Да претпоставиме дека оваа формула важи за некој n -аголник, $n \in \mathbb{N}$.

3) Знаеме дека за n е бројот на темиња во многуаголникот, па според тоа $n+1$ -аголник има едно теме повеќе од n -аголникот и кај него за збирот важи $S_n = (n-2) \cdot 180^0$. Додаденото теме значи дека додаваме уште еден триаголник т.е. додаваме во збирот уште 180^0 , па од индуктивната претпоставка следува

$$S_n + 180^0 \stackrel{u.n.}{=} (n-2) \cdot 180^0 + 180^0 = (n-1) \cdot 180^0 = ((n+1)-2) \cdot 180^0 = S_{n+1}.$$

Според ПМИ заклучуваме дека формулата важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

Пример 2. Докажи дека $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}$, за секој природен број n .

1) За $n=1$, на левата страна се добива $\cos x \cdot \cos 2x = \cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)$,

а на десната страна се добива $\frac{\sin 4x}{4 \sin x} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{4 \sin x} = \frac{2 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2 \sin x}$.

Значи равенството важи за $n=1$.

2) Претпоставуваме дека е точно за $n=k$, односно:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^k x = \frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1} \sin x}.$$

3) Ќе докажеме дека тврдењето е точно и за $n=k+1$, односно

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^k x \cdot \cos 2^{k+1} x = \frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1} \sin x} \cdot \cos 2^{k+1} x.$$

Со трансформација на производот од десната страна и со примена на индуктивната претпоставка се добива

$$\begin{aligned} \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^k x \cdot \cos 2^{k+1} x &\stackrel{u.n.}{=} \frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1} \sin x} \cdot \cos 2^{k+1} x = \\ &= \frac{2 \cdot \sin 2^{k+1} x \cdot \cos 2^{k+1} x}{2 \cdot 2^{k+1} \sin x} = \\ &= \frac{\sin 2 \cdot 2^{k+1} x}{2^{(k+1)+1} x} = \frac{\sin 2^{(k+1)+1} x}{2^{(k+1)+1} x}. \end{aligned}$$

Овде искористивме дека $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$.

Пример 3. Докажи дека ако $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$, тогаш $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

1) За $n = 1$, важи $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$.

2) Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $n = k$, односно

$$x^k + \frac{1}{x^k} = 2 \cos k\alpha$$

3) За $n = k + 1$ со користење на индуктивната претпоставка имаме дека

$$\begin{aligned} \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) &= \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \stackrel{u.n.}{=} \\ &= 2 \cos k\alpha \cdot 2 \cos \alpha - 2 \cos (k-1)\alpha = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos(k\alpha + \alpha) + \cos(k\alpha - \alpha)) - 2 \cos (k-1)\alpha = \\ &= 2 (\cos(k\alpha + \alpha) + \cos(k\alpha - \alpha) - \cos(k-1)\alpha) = \\ &= 2 \cos(k+1)\alpha \end{aligned}$$

Го користевме равенството $\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) + \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$.

Пример 4. Докажи дека $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, каде $x \neq 1$, важи за секој природен број n .

1) Тврдењето е точно за $n = 1$.

2) Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $n = k$, односно

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}, \text{ каде } x \neq 1.$$

3) За $n = k + 1$ со користење на индуктивната претпоставка имаме дека

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + x^{k+1} &\stackrel{u.n.}{=} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} = \\ &= \frac{x^{k+1} - 1 + x^{k+2} - x^{k+1}}{x - 1} = \frac{x^{(k+1)+1} - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

Значи равенството важи за секој природен број.

Задачи

1. Докажи дека вкупниот број на дијагонали во n -аголник се пресметува со формулата $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

2. Докажи дека за секој природен број важи

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

3. Докажи дека $3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33\dots3}_{n\text{-пати}} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$.

4.3. Примена на ПМИ при докажување неравенства

Обично кога се неравенства во прашање може да се случи одредено неравенство да важи почнувајќи од некој природен број k . Најчесто користена техника на докажување кога се неравенства во прашање е ако некое тврдење треба да се докаже за $P(n)$, за сите $n \geq k$, тогаш после проверката за $P(k)$, претпоставуваме дека неравенството $P(m)$ е исполнето за некој природен број $m \geq k$ и проверуваме што важи за $P(m+1)$.

Пример 1. Докажи дека $2^n \geq n^2$ за сите природни броеви $n \geq 4$.

1) За $n = 4$, имаме $2^4 = 16 \geq 4^2$.

2) Да претпоставиме дека за некој природен број $n = k$ важи $2^k \geq k^2$.

3) За $n = k + 1$ од индуктивната претпоставка следува

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \stackrel{\text{и.п.}}{\geq} k^2 \cdot 2 = k^2 + k^2 \geq 2k + 1 + k^2 = (k+1)^2$$

Ги користевме неравенствата $k^2 = k \cdot k \geq 4 \cdot k > 3k = 2k + k > 2k + 1$.

Пример 2. Докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ важи $3^n > 2^n + 3n$.

1) За $n = 3$ имаме $3^3 = 27 > 17 = 8 + 9 = 2^3 + 3 \cdot 3$.

2) Да претпоставиме дека за некој природен број $n = k$ важи $3^k > 2^k + 3k$.

3) За $n = k + 1$ имаме дека $3^k > 3$. Од индуктивната претпоставка имаме $3^k \stackrel{\text{и.п.}}{>} 2^k + 3k$, па ако помножиме со 2 добиваме $3^k \cdot 2 > 2^{k+1} + 6k$. Со собирање на двете неравенства $3^k \cdot 2 > 2^{k+1} + 6k$ и $3^k > 3$ се добиваме

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 = 3^k \cdot 2 + 3^k > 2^{k+1} + 6k + 3 > 2^{k+1} + 3k + 3 = 2^{k+1} + 3(k+1)$$

со што е докажано неравенството.

Пример 3. Докажи дека за секој природен број n важи

$$\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{(n-2) + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1.$$

При докажување на неравенства обично се користат помошни ознаки со кои се поедноставува приемната на принципот, па ќе земеме дека

$$A_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \sqrt{(n-2) + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}.$$

1) За $n = 1$, имаме $A_1 = \sqrt{1} < \sqrt{1} + 1$. Што значи дека тврдењето е точно.

2) Да претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број $n = k$ т.е. $A_k < \sqrt{k} + 1$.

3) За $n = k + 1$ со помош на оваа претпоставка сакаме да видиме што се случува за A_{k+1} . Имаме дека

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \sqrt{(k+1) + A_k} \stackrel{\text{и.п.}}{<} \sqrt{(k+1) + \sqrt{k} + 1} < \sqrt{(k+1) + 2\sqrt{k+1} + 1} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{k+1} + 1)^2} = \sqrt{k+1} + 1. \end{aligned}$$

Овде го искористивме неравенството $\sqrt{k} < \sqrt{k+1} < 2\sqrt{k+1}$.

Задачи

1. Докажи дека за секој природен број n , важи $n < 2^n$.

2. Докажи дека $2^n > 10n^2$, за $n \geq 10$.

3. Докажи дека $\sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}} < 3$.

4.4. Примена на ПМИ при докажување на деливост

Пример 1. Докажи дека секој природен број поголем од еден може да се запише како производ од прости броеви и бројот 1.

1) Бројот 2 е првиот природен број поголем од 1, па го проверуваме тврдењето за него. Од тоа што $2 = 2 \cdot 1$, гледаме дека тврдењето е исполнето.

2) Да претпоставиме дека $n = k$ е природен број за кој е исполнето барањето.

3) Тогаш $n = k + 1$ може да биде прост или сложен број. Ако $k + 1$ е прост број, тогаш тврдењето е докажано. Ако, пак, $k + 1$ е сложен број, тогаш тој може да се напише како производ на некои природни броеви a и b , такви што $a > 1, b < n + 1$ и $ab = n + 1$. Од тоа што a и b се помали од $k + 1$, за нив важи индуктивната претпоставка т.е. тие може да се запишат како производ од прости множители.

Пример 2. Докажи дека за секој природен број n важи $57 \mid (7^{n+2} + 8^{2n+1})$.

1) За $n = 1$, имаме $7^{1+2} + 8^{2 \cdot 1 + 1} = 343 + 512 = 855 = 57 \cdot 15$ што значи тврдењето важи.

2) Да претпоставиме дека за некој природен број $n = k$ важи $57 \mid (7^{k+2} + 8^{2k+1})$.

3) Да провериме што се случува за $n = k + 1$. Да го разгледаме збирот

$$7^{k+1+2} + 8^{2(k+1)+1} = 7^{k+2} \cdot 7 + 8^{2k+1} \cdot 8^2 = 7 \cdot (7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57 \cdot 8^{2k+1}.$$

Јасно е дека $57 \mid 7 \cdot (7^{k+2} + 8^{2k+1})$ според индуктивната претпоставка, па според тоа и збирот $7 \cdot (7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57 \cdot 8^{2k+1}$ е делив со 57 со што е докажано тврдењето.

Пример 3. Нека n е природен број. Докажи дека во секое множество од $2^{n+1} - 1$ цели броеви може да избереме 2^n броеви чиј збир е делив со 2^n .

1) За $n = 1$ множеството има $2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 3$ елементи. Во множество од три цели броеви или барем два се непарни или барем два се парни. Според тоа, изборот на множество со два елементи, во првиот случај два непарни, а во вториот два парни, ни дава збир кој е парен број т.е. е делив со 2. Значи тврдењето важи за $n = 1$.

2) Да претпоставиме дека тврдењето важи за природниот број $n = k$, т.е. дека од множеството со $2^{k+1} - 1$ може да избереме 2^k елементи чиј збир е делив со 2^k .

3) Треба да видиме што се случува за $n = k + 1$, односно што се случува во множество со $2^{k+2} - 1$ елементи. Од тоа што $2^{k+2} = 2^{k+1} \cdot 2 > 2^{k+1}$ важи $2^{k+2} - 1 > 2^{k+1} - 1$, значи дека во множеството со $2^{k+2} - 1$ постои подмножество со $2^{k+1} - 1$ елементи. Од претпоставката во тоа подмножество може да избереме 2^k елементи чиј збир е делив со 2^k . Да го означиме неговиот збир на елементи со S .

Кога од множеството сме издвоиле 2^k елементи, тогаш во него останале $2^{k+2} - 1 - 2^k = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 - 2^k = 2^{k+1} + 2^k - 1$ елементи. Бидејќи $2^{k+1} + 2^k - 1 > 2^{k+1} - 1$, може повторно да избереме подмножество кое има $2^{k+1} - 1$ елементи и од него, според индуктивната претпоставка, да избереме 2^k елементи чиј збир е делив со 2^k . Нека нивниот збир е S_1 . Остануваат $2^{k+1} + 2^k - 1 - 2^k = 2^{k+1} - 1$ елементи, па пак ја применуваме претпоставката и добиваме нови 2^k елементи чиј збир е делив со 2^k . Нека нивниот збир е S_2 . Сите три зборови S , S_1 и S_2 се деливи со 2^k , т.е. $S = 2^k \cdot a$, $S_1 = 2^k \cdot b$ и $S_2 = 2^k \cdot c$, каде a, b, c се цели броеви.

Од дискусијата за три цели броеви, следува дека од овие три броеви може да избереме два чиј збир е парен број. Нека тие се a и b , т.е. $a + b = 2m$. Според тоа $S + S_1 = 2^k \cdot a + 2^k \cdot b = 2^k \cdot (a + b) = 2^k \cdot 2m = 2^{k+1} m$, каде m е цел број. Од друга страна множествата чиј зборови на елементите се S и S_1 имаат секое по 2^k елементи, и се дисјунктни, па нивната унија има $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ елементи и $S + S_1$ е делив со 2^{k+1} . Аналогно се постапува ако $a + c$ или $b + c$ е парен.

Значи докажавме дека може да се избере множество со 2^{k+1} елементи чиј збир на елементи е делив со 2^{k+1} .

Задачи

1. Докажи дека бројот $a_n = n^3 + 5n$ е делив со 3, за секој природен број n .
2. Докажи дека бројот $a_n = 2^{n+2} \cdot 3n + 5n - 4$ е делив со 25, за секој природен број n .
3. Докажи дека $13 \mid (3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3})$ за секој природен број n .
4. Докажи дека за секои природни броеви n и k , изразот $(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n + 1)n^{4k-1}$ е делив со $n^5 + 1$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

Со математичка индукција докажи ги равенствата:

1. $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$.
2. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2}{3} n(n + 1) \cdot (2n + 1)$.

3. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3n+1}.$

4. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$

5. Докажи дека за секој природен број n важи

$$2 + 16 + 56 + \dots + (3n-2) \cdot 2^n = 10 + (3n-5) \cdot 2^{n+1}.$$

6. Докажи дека $3^n > n^4$, за секој природен број $n > 7$.

7. Докажи дека $n^3 > 3n+3$, за секој природен број $n > 2$.

8. Докажи дека за секој природен број n , $7 \mid (2^{n+2} + 3^{2n+1})$.

9. Докажи дека за секој природен број n , $3 \mid (5^n + 2^{n+1})$.

10. Докажи дека за секој природен број n , $17 \mid (3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})$.

5. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

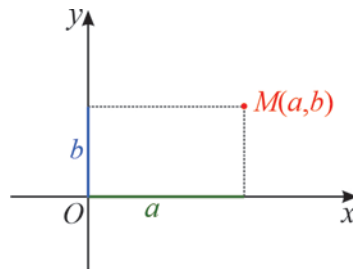
5.1. Повторување за комплексни броеви во алгебарски облик

Минатата учебна година се запозна со множеството комплексни броеви. Во оваа тема ќе имаш можноста да го збогатиш твоето знаење од множеството и да согледаш зошто токму овие броеви се важен сегмент од знаењето за физичарите и инженерите кои работат на полето на електрицитетот и магнетизмот, оптиката и хидродинамиката.

Множеството $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ се вика множество комплексни броеви.

Комплексните броеви вообичаено ги означуваме со буквите $z, w, u, \dots$ итн. Записот $z = a + bi$ се вика **алгебарска (стандардна) форма на комплексен број**. Притоа бројот a се нарекува **реален дел**, а бројот b се нарекува **имагинарен дел** на комплексниот број $z = a + bi$ и ги користиме ознаките $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$. Како што е вообичаено, $-bi$ го означува спротивниот број на bi и по договор $a + (-bi) = a - ib$. Овој број се нарекува **конјугирано комплексен** на z и се означува со $\bar{z}$. Значи $\bar{z} = a - ib$.

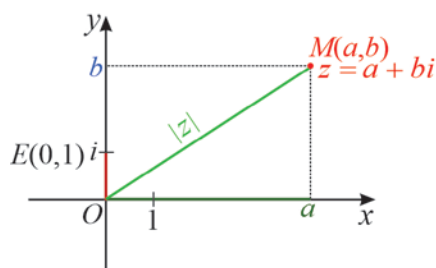
Нека во рамнината Σ е зададен правоаголен координатен систем xOy . Тогаш на секоја точка $M \in \Sigma$ одговара подреден пар на реални броеви (a, b) , каде што a е апсциса, а b - ордината на точката M (цртеж 1).



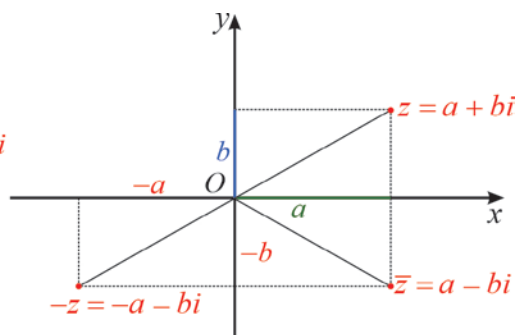
Цртеж 1

Од друга страна, со подредениот пар на реални броеви (a, b) , зададен е еден и само еден комплексен број $z = a + bi$. На комплексниот број $z = a + bi$, односно $z = (a, b)$ му одговара (му ја придружуваме) точката $M(a, b)$ од координатната рамнина xOy (цртеж 1), и обратно, точката $M(a, b)$ од координатната рамнина xOy е слика (геометриски претставник) на комплексниот број $z = a + bi$. Затоа координатната рамнина xOy користена за геометриско претставување на комплексните броеви се нарекува и **комплексна рамнина**.

Реалните броеви $z = a + 0i = a$ на комплексната рамнина ги претставуваме со точките на Ox -оската, а чисто имагинарните броеви $z = 0 + bi = bi$ со точките на Oy -оската (цртеж 2). Затоа Ox -оската се вика уште и **реална оска**, а Oy -оската се вика **имагинарна оска**. Точката која одговара на имагинарната единица $i = 0 + 1i$ е $E(0, 1)$, а на комплексната нула $0 + 0i = 0$ одговара координатниот почеток $O(0, 0)$ (цртеж 2).



Цртеж 2



Цртеж 3

Конјугирани комплексните броеви z и $\bar{z}$ секогаш се две точки симетрични во однос на реалната оска Ox , а спротивните еден на друг комплексни броеви z и $-z = -a - ib$ се две точки симетрични во однос на координатниот почеток $O(0,0)$ (цртеж 3).

Модул $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ на комплексниот број $z = a + bi$ е растојанието на точката $M(a,b)$ до координатниот почеток O (цртеж 2).

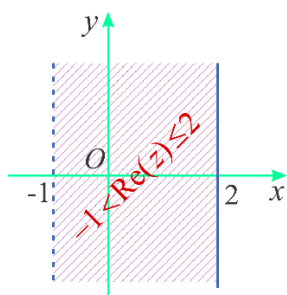
Множеството на сите комплексни броеви со ист:

- реален дел претставува права паралелна со Oy -оската;
- имагинарен дел е права паралелна со Ox -оската,
- модул $|z| = r, r > 0$ претставува кружница со центар во координатниот почеток $O(0,0)$ и радиус r .

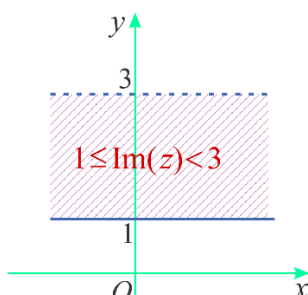
Пример 1. Деловите од комплексната рамнина xOy во кои лежат сите точки $z = x + yi$ што ги задоволуваат условите:

- а)** $-1 < \operatorname{Re}(z) \leq 2$; **б)** $1 \leq \operatorname{Im}(z) < 3$; **в)** $|z| \leq 2$;

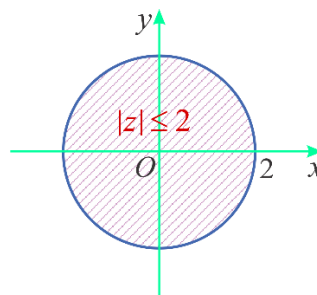
се прикажани шрафирано на цртеж 4, цртеж 5 и цртеж 6, соодветно.



Цртеж 4



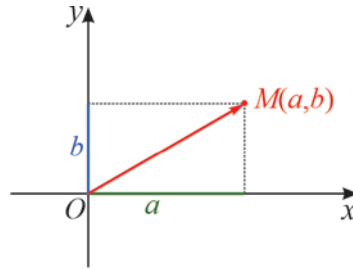
Цртеж 5



Цртеж 6

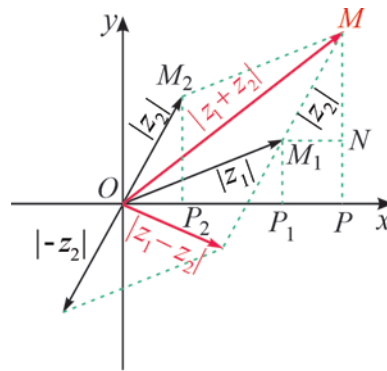
На комплексните броеви може да им се даде и друга геометриска интерпретација, имено секој комплексен број $z = a + bi$ што одговара на точката $M(a,b)$ може да се разгледува и како вектор $\overrightarrow{OM}$ со координати (a,b) (цртеж 7). На овој начин на секој комплексен број $z = a + bi$ ($z \neq 0$) му соодветствува еден и само еден вектор $\overrightarrow{OM}$, и обратно, секој вектор $\overrightarrow{OM}$ е слика (претставник) на точно еден број $z = a + bi$. Според тоа операциите собирање и одземање на комплексни броеви може да се сведат на соодветните операции со вектори.

На пример, ако се дадени броевите $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ нивниот збир е еднаков на бројот $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.



Цртеж 7

Ако на комплексниот број z_1 му одговара вектор $\overrightarrow{OM_1}$ со координати на крајната точка $M_1(a_1, b_1)$, а на комплексниот број z_2 - вектор $\overrightarrow{OM_2}$ со крајна точка $M_2(a_2, b_2)$, тогаш збирот на векторите $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ ќе биде векторот $\overrightarrow{OM}$ со почеток O и крај во четвртото теме на паралелограмот, што е конструиран над векторите $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ (цртеж 8).



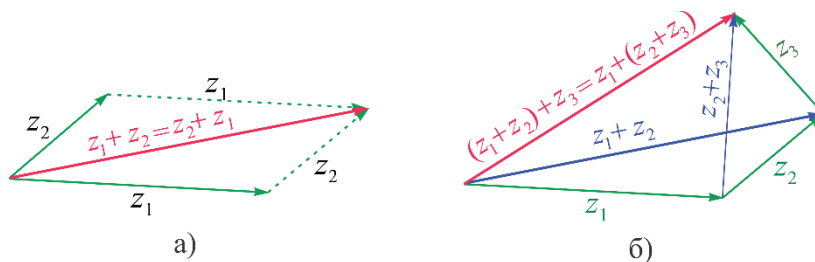
Цртеж 8

Од складноста на триаголниците OP_2M_2 и M_1NM следува дека точката M ќе има апсциса, $\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2} = a_1 + a_2$ и ордината,

$$\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM} = \overline{P_1M_1} + \overline{P_2M_2} = b_1 + b_2.$$

Според тоа, точката M , односно векторот $\overrightarrow{OM}$ ќе му одговара на комплексниот број $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, т.е. на збирот на комплексните броеви $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$. Значи, ако на бројот z_1 му одговара вектор $\overrightarrow{OM_1}$, а на бројот z_2 му одговара вектор $\overrightarrow{OM_2}$, тогаш на збирот $z_1 + z_2$ ќе му одговара збирот на векторите $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, а на разликата $z_1 - z_2$ ќе одговара разликата на векторите $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$.

Ако комплексните броеви z_1, z_2 и z_3 ги третираме како вектори, лесно може да се покаже дека за собирањето на комплексните броеви важат комутативниот и асоцијативниот закон (цртеж 9а и цртеж 9б).



Цртеж 9

Задачи

1. Одреди го реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број z ако:

- а) $z = 4 + 2i$; б) $z = -3 + 4i$; в) $z = 3 - 2i$;
 г) $z = -4 + \frac{1}{2}i$; д) $z = \sqrt{2} + (1 + \sqrt{3})i$; е) $z = 1 + \sqrt{2} + i$;
 е) $z = -3$; ж) $z = -3i$.

2. Запиши го во алгебарска форма комплексниот број z ако:

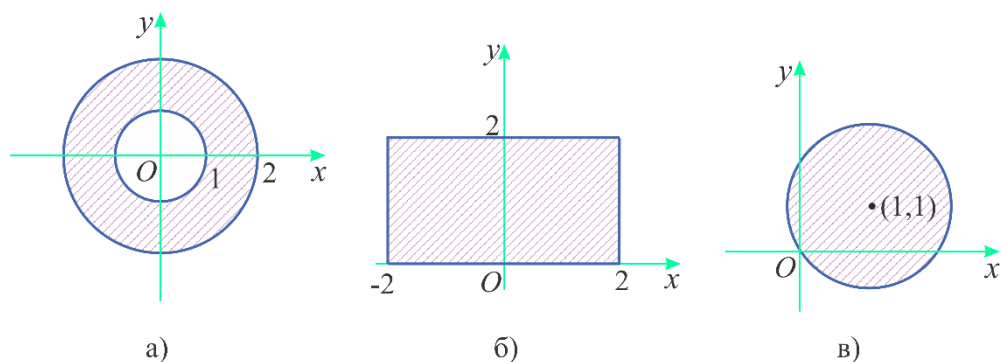
- а) $\operatorname{Re}(z) = 3, \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{4}, \operatorname{Im}(z) = 2 - \sqrt{2}$;
 в) $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{3} - \sqrt{3}, \operatorname{Im}(z) = 0$; г) $\operatorname{Re}(z) = m + 1, \operatorname{Im}(z) = n - \sqrt{2}$.

3. Запиши ги во алгебарска форма комплексните броеви што им одговараат на точките: $A(-2, 1), B(0, -5), C(-4, 0), D(2, 2\sqrt{3})$.

4. Најди го множеството од сите точки $z = x + iy$ од комплексната рамнина кои ги задоволуваат условите:

- а) $\operatorname{Re}(z) \leq 0$; б) $-2 < \operatorname{Re}(z) \leq 5$; в) $\operatorname{Im}(z) \geq 3$; г) $\operatorname{Im}(z) < 5$;
 д) $|z| = 3$; е) $|z| \leq 4$; ж) $1 \leq |z| \leq 3$; з) $\operatorname{Re}(z) \geq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 0, |z| \leq 2$.

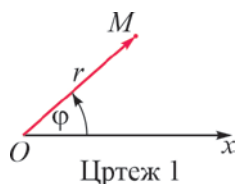
5. Најди ги условите кои ги задоволуваат сите точки (и само тие) од шрафираната област на цртеж 10а, цртеж 10б и цртеж 10в.



Цртеж 10

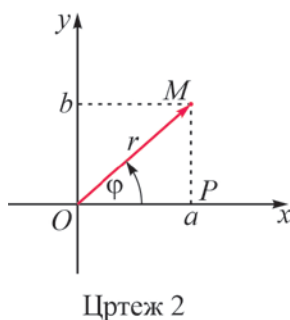
5.2. Поим за тригонометриски и експоненцијален облик на комплексен број

Положбата на која било точка M на рамнината со помош на декартовиот координатен систем ја одредуваме со нејзините координати. Покрај овој координатен систем често користиме и друг систем наречен **поларен координатен систем**. Него го определуваме кога во рамнината избираме фиксна точка O (**пол**) и полуправа Ox (**поларна оска**) што излегува од полот O . Положбата на точката M на рамнината ја определуваме со два броја кои се нарекуваат **поларни координати** и тоа: должината r на векторот $\overrightarrow{OM}$ и аголот φ (мерен во радијани), што тој вектор го зафаќа со поларната оска (цртеж 1).



Постои врска меѓу декартовите координати (a, b) и поларните координати (r, φ) на една точка од рамнината. Ако поларниот координатен систем го поставиме така што неговиот пол O ќе се совпадне во координатниот почеток $O(0, 0)$, а поларната оска се совпадне со позитивната насока на апсцисната оска на декартовиот систем (цртеж 2), тогаш од дефинициите на тригонометриските функции, за правоаголниот триаголник OMP имаме $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$. Оттука, при $r > 0$, следува дека

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Овие равенства ја даваат врската меѓу декартовите и поларните координати.

Досега видовме дека на секој комплексен број z му соодветствува единствена точка M на координатната рамнина, а во неговата алгебарска форма $z = a + bi$, се користат декартовите координати (a, b) на точката M што му соодветствува на бројот z . Со примена на равенствата, комплексниот број z можеме да го запишеме и во следнава форма

$$z = a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi)i \quad \text{или} \quad z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Овој запис на комплексниот број се вика негова **тригонометриска форма**.

Должината r на радиусвекторот $\overline{OM}$ се вика **модул** или апсолутна вредност на комплексниот број z и се означува $|z|$, а радијанската мера на аголот φ што радиусвекторот $\overline{OM}$ го гради со позитивната насока на Ox -оската се вика **аргумент** на комплексниот број z и се означува со $\text{Arg } z$. Според тоа, $|z| = r, \text{Arg } z = \varphi$, каде што r и φ се поларни координати на точката M , што му одговара на бројот z .

Модулот на кој било комплексен број z е ненегативен реален број, при што тој е еднаков на нула само за $z = 0$. Тој е еднозначно определен со положбата на точката M , т.е. за него важи $r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аголот φ , односно $\text{Arg } z$, може да ги добие кои било реални вредности-позитивни или негативни, при што позитивните агли имаат насока спротивна на движењето на стрелките на часовникот. Аргументот не е определен само за $z = 0 = 0 + i0 = 0(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ за секој φ . По дефиниција се зема $\text{Arg } 0 = 0$.

Аргументот на кој било комплексен број $z \neq 0$ има бесконечно многу вредности коишто се разликуваат една од друга за $2k\pi$, за цел број k т.е. $\arg z = \{\text{Arg } z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Значи, ако φ е аргумент на бројот z , тогаш и $\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{R}$ е, исто така, аргумент на тој број. Од сите тие вредности, обично ја избираме вредноста на φ што го задоволува условот $-\pi < \varphi \leq \pi$ за да биде φ еднозначно определен за секој комплексен број. Таа вредност се вика **главна вредност на аргументот** на бројот z и се означува со $\arg z$, т.е. $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Понекогаш главната вредност на φ се дефинира со $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Ако комплексниот број е реален број, т.е. $z = a + 0i = a$, тогаш $\varphi = 0$ (ако $a > 0$) или $\varphi = \pi$ (ако $a < 0$).

Да заклучиме, множеството од сите комплексни броеви z со ист аргумент φ е полуправа OM која со позитивната насока на Ox -оската зафаќа агол φ , а множеството, пак од сите комплексни броеви z со ист модул $|z| = r$ е кружница со центар во почетокот (полот) O и радиус r .

Аргументот и модулот на комплексниот број $z = a + bi \neq 0$ ги одредуваме од равенставата $\cos \varphi = \frac{a}{r}, \sin \varphi = \frac{b}{r}, r = \sqrt{a^2 + b^2}$, при што од знаците на $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, односно од знаците на a и b утврдуваме во кој квадрант лежи бараната вредност на аргументот. Понекогаш, при одредувањето на r и φ пожелно е да користиме и соодветен цртеж.

Пример 1. Со помош на цртеж 3, лесно добиваме дека

$$\text{а)} |2 - 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \arg(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4},$$

$$\text{б)} |i| = |0 + i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \arg i = \frac{\pi}{2},$$

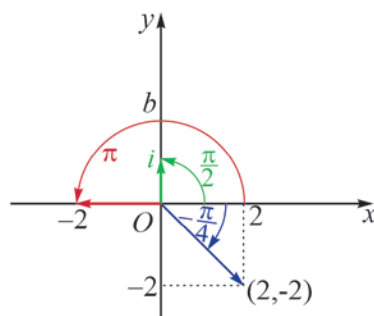
$$\text{в)} |-2| = 2, \arg(-2) = \pi.$$

Според тоа, имаме дека

$$\text{а)} 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right],$$

$$\text{б)} i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\text{в)} -2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi).$$



Цртеж 3

Пример 2. Да го запишеме во тригонометриска форма комплексниот број $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Со помош на формулите (2) добиваме

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Оттука } \varphi = \frac{\pi}{3}. \quad \text{Значи: } 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Пример 3. Следниве комплексни броеви да ги запишеме во тригонометриска форма:

$$\text{а)} z = -2 \left(\sin \frac{\pi}{5} - i \cos \frac{\pi}{5} \right);$$

$$\text{б)} w = 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{3}{4} \pi \right).$$

а) Комплексниот број z не е зададен во тригонометриска форма, затоа што модулот не може да биде негативен број (-2) и затоа што коефициентот на иминарниот дел во заградата е $-\cos \frac{\pi}{5}$, а не $\sin \frac{\pi}{5}$. Да го претставиме дадениот

број z во облик $z = 2 \left(-\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \right)$, заради равенството $-2 = (-1) \cdot 2 = 2 \cdot (-1)$

и асоцијативноста на множењето. За да го претставиме бројот z во тригонометриска форма, за негов аргумент треба да се најде таков агол φ за кој ќе биде $\cos \varphi = -\sin \frac{\pi}{5}$, $\sin \varphi = \cos \frac{\pi}{5}$.

Земајќи предвид дека аголот φ е во II квадрант и за него функцијата преминува во кофункција, тогаш не е тешко да утврдиме дека $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}$.

$$\text{Навистина, } \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} \right) = -\sin \frac{\pi}{5}, \quad \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} \right) = \cos \frac{\pi}{5}.$$

Значи, тригонометриската форма на бројот z гласи:

$$z = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{10} + i \sin \frac{7\pi}{10} \right).$$

б) Комплексниот број w не е зададен во тригонометриска форма затоа што функциите косинус и синус не зависат од ист агол φ . Овде наидуваме на потешкотии кај кои во најголем број случаи (при преминот од алгебарска во тригонометриска форма на комплексниот број, и обратно) е невозможно според дадените вредности на синусот и косинусот да се одреди точно аголот φ , т.е. за даден агол да се напишат точните вредности на неговиот синус и косинус.

Бидејќи $\cos \varphi = \cos(\varphi + 2k\pi)$, $\sin \varphi = \sin(\varphi + 2k\pi)$, тригонометриската форма на комплексниот број z може да се запише и во видот:

$$z = r[\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ова значи и дека, два комплексни броја $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ претставени во тригонометриска форма

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

се еднакви, ако и само ако:

$$r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

За модулите и аргументите на два конјугирано комплексни броја z и $\bar{z}$ важат релациите:

$$\bar{r} = r, \quad \bar{\varphi} = -\varphi, \quad \text{односно,} \quad |\bar{z}| = |z|, \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Значи, тригонометриската форма на конјугирано комплексниот број $\bar{z}$ на бројот $z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$ ќе гласи

$$\bar{z} = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = r(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Во пракса често за одредување на аргументот се користат правилата:

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{ако } a > 0 \\ \arctg \frac{b}{a} + \pi, & \text{ако } a < 0, b \geq 0 \\ \arctg \frac{b}{a} - \pi, & \text{ако } a < 0, b \leq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ако } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ако } a = 0, b < 0 \\ \text{неодредено,} & \text{ако } a = 0, b = 0 \\ \pi, & \text{ако } a < 0, b = 0 \\ 0, & \text{ако } a > 0, b = 0 \end{cases}$$

Пример 4. Комплексниот број $z = 4 + 3i$ запишан во тригонометриска форма гласи

$$z = 5(\cos 36,87^\circ + i \sin 36,87^\circ)$$

бидејќи $\varphi = \arctg \frac{3}{4} \approx 36,87^\circ$, а $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Дефинираме операција **степенување на бројот e со комплексен број** $z = x + yi$ на следниов начин:

$$e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Според тоа за $x = 0$, се добива $e^{yi} = \cos y + i \sin y$, кое се нарекува **Ојлерова формула**.

Притоа важи $|e^{x+yi}| = |e^x| \cdot |\cos y + i \sin y| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$.

Ако $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ е произволен комплексен број запишан во тригонометриска форма, тогаш $z = re^{i\varphi}$ **експоненцијален облик** на тој комплексен број. Очигледно, $\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = re^{-i\varphi}$.

Ако ги собереме, односно одземеме z и $\bar{z}$ се добиваат:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Пример 5. Да го запишеме во експоненцијален облик бројот $z = \sqrt{3} + i$.

Имаме дека $r = |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, па $\varphi = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Значи

$$z = re^{i\varphi} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Задачи

1. Најди го модулот и аргументот на комплексните броеви:

а) $z_1 = \sqrt{3} - i$; **б)** $z_2 = 1 - i$; **в)** $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$; **г)** $z_4 = 2 + i\sqrt{12}$; **д)** $z_5 = 1 + i$.

2. Претстави ги во тригонометриска форма следниве комплексни броеви:

а) $z_1 = 1 - i \operatorname{tg} \alpha$; **б)** $z_2 = 1 + \sin \alpha + i \cos \alpha$; **в)** $z_3 = -3 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

3. Претстави ги во алгебарска форма комплексните броеви:

а) $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$; **б)** $8 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.

4. Претстави ги во тригонометриска и експоненцијална форма броевите:

а) $-i$; **б)** $3i$; **в)** $2 + 2i$; **г)** $3 \cos \frac{\pi}{6} - 3i \sin \frac{\pi}{6}$; **д)** $\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}$.

5. Даден е бројот $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Претстави ги во тригонометриска форма броевите $\bar{z}$ и z^{-1} .

6. Утврди кој услов е потребен за да биде исполнето равенството $z^2 = (\bar{z})^2$.

7. Најди го множеството на сите точки $z = x + yi$ од комплексната рамнина, што ги задоволуваат условите:

а) $0 < |z| \leq 3$; **б)** $\arg z = \frac{\pi}{4}$; **в)** $|z| = 1$;

г) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$; **д)** $0 \leq |z| \leq 5$ и $\arg z \leq \pi$.

5.3. Операции со комплексни броеви во тригонометриски облик

Множењето и делењето на комплексните броеви се поедноставува ако тие се зададени во тригонометриска форма.

Нека $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

се два комплексни броја зададени во тригонометриска форма. Тогаш

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \end{aligned}$$

Од тригонометријата се познати формулите:

$$\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Според тоа, $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

од каде што ги добиваме равенствата:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Според тоа, при множењето на комплексни броеви, нивните модули се множат, а аргументите се собираат.

Производот на конечно многу комплексни броеви

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \dots, z_n = r_n(\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$$

се одредува со помош на равенството:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)].$$

Пример 1. Одреди го производот на комплексните броеви:

$$z_1 = 3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}), z_2 = 2\sqrt{2}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}), z_3 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}).$$

Имаме дека

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6})] = \\ &= 12(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) = 12[(\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}))] = \\ &= 12(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = 12(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}) = 6(1 - i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

За производот на два конјугирано комплексни броја z и $\bar{z}$ имаме:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = \\ &= r^2[(\cos(\varphi - \varphi) + i \sin(\varphi - \varphi))] = \\ &= r^2(\cos 0 + i \sin 0) = r^2(1 + i0) = r^2. \end{aligned}$$

Бидејќи $r = |z|$ добиваме дека $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Оттука, во посебен случај, ако $r = 1$, имаме $(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) = 1$.

Со аналогна постапка за количникот на комплексните броеви (1) при $z_2 \neq 0$, односно при $r_2 \neq 0$, добиваме:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] \end{aligned}$$

Според тоа, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$,

од каде што следува дека $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2}$, $\text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \text{Arg} z_1 - \text{Arg} z_2$.

Според тоа, при делењето на комплексните броеви модулите се делат, а аргументите се одземаат.

Пример 2. Одреди го количникот на комплексните броеви:

$$z_1 = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) \text{ и } z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}).$$

Имаме дека

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{\sqrt{2}} [\cos(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}) + i \sin(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12})] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\sqrt{2}} (\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i. \end{aligned}$$

Пример 3. Одреди го реципрочниот број $\frac{1}{z}$ на бројот $z \neq 0$.

Од $\frac{1}{z} = \frac{\cos 0 + i \sin 0}{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{1}{r} [(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))]$ добиваме дека

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = r^{-1} [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)].$$

Според тоа, имаме дека $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $\text{Arg}(z^{-1}) = -\text{Arg} z$.

Ако $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ се два комплексни броеви, тогаш нивниот производ и количник се соодветно

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \text{ и } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Пример 4. а) Да го најдеме производот на комплексните броеви $z_1 = 5e^{-i\frac{\pi}{2}}$ и $z_2 = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$. Согласно погорната забелешка имаме дека

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 5 \cdot 6 e^{-i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{3}} = 30 e^{-i\frac{\pi}{6}} = 30 (\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})) = \\ &= 30 (\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}) = 30 (\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}) = 15\sqrt{3} - 15i \end{aligned}$$

б) Одреди го количникот на комплексните броеви $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ и $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Согласно погорната забелешка имаме дека

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2} e^{i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{3}} = 2 e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = 2 (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) = \\ &= 2 (\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

Задачи

1. Најди го производот и количникот на комплексните броеви:

а) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \cdot \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4});$

б) $(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) \cdot \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}).$

2. Најди ги броевите:

а) $z_1 \cdot z_2;$

б) $\frac{z_1}{z_2};$

в) $\frac{z_2}{z_1};$

ако $z_1 = 2(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ).$

3. Како се менува модулот и аргументот на комплексниот број z , кога тој

а) се множи со i ;

б) се дели со i .

4. Одреди го $z_1 \cdot z_2$, ако:

а) $z_1 = 5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ и $z_2 = 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ);$

б) $z_1 = 4(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ и $z_2 = 6(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8});$

в) $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$

5. Најди го количникот $\frac{z_1}{z_2}$, ако:

а) $z_1 = \cos 130^\circ + i \sin 130^\circ$ и $z_2 = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ;$

б) $z_1 = 2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)$ и $z_2 = 5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ);$

в) $z_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ и $z_2 = 3(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ);$

г) $z_1 = \cos 70^\circ + i \sin 70^\circ$ и $z_2 = \cos 100^\circ + i \sin 100^\circ.$

6. Дадени се комплексните броеви $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$ $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$

а) Трансформирај ги комплексните броеви во експоненцијален облик.

б) Помножи ги и подели ги комплексни броеви со користење на нивниот експоненцијален облик.

5.4. Степенување на комплексен број во тригонометриски облик. Моаврова формула

Ако во формулата за производ на конечен број комплексни броеви замениме $z_1 = z_2 = \dots z_n = z$, каде што $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, тогаш за секој природен број n важи:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Според тоа, при степенувањето на комплексен број z со показател природен број n , модулот се степенува со тој показател, а аргументот се множи со показателот на степенот, т.е.

$$|z^n| = |z|^n = r^n, \quad \text{Arg}(z^n) = n\text{Arg } z = n\varphi.$$

Пример 1. За степенот $(1+i)^{12}$ имаме

$$\begin{aligned}(1+i)^{12} &= [\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})]^{12} = 2^6 (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = \\ &= 64(\cos \pi + i \sin \pi) = 64(-1 + i \cdot 0) = -64.\end{aligned}$$

При $r=1$ формулата го добива обликот:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Оваа формула игра голема улога во елементарната математика и се вика **Моаврова формула**. Таа важи и кога степеновиот показател е кој било цел негативен број, т.е.

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi).$$

Ако се има предвид дека $z^{-n} = (z^{-1})^n$, тогаш со примена на Моавровата формула врз бројот z^{-1} при $r=1$ ќе ја добиеме оваа формула.

Пример 2. Да ги изразиме $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ преку $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Со замена за $n=3$ во формулата за степен на комплексен број се добива

$$\begin{aligned}\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \\ &= \cos^3 \varphi + 3\cos^2 \varphi \cdot i \sin \varphi + 3i^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i^3 \sin^3 \varphi \\ &= \cos^3 \varphi - 3\cos \varphi \sin^2 \varphi + i(3\cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi).\end{aligned}$$

Познато е дека два комплексни броја се еднакви ако и само ако се еднакви соодветно, нивните реални и имагинарни делови, па важат равенствата:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3\cos \varphi \sin^2 \varphi \quad \text{и} \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Задачи

1. Даден е комплексниот број $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$. Најди ги броевите:

а) z^4 ; **б)** z^6 ; **в)** z^{10} .

2. Најди ја комплексниот број z^3 , ако $z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

3. Најди ја вредноста на изразот $z^4 + 1$ за $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

4. Упрости го изразот:

а) $(1+i\sqrt{2})^5 - (1-i\sqrt{2})^5$; **б)** $(\sqrt{3}+i)^6 - (\sqrt{3}-i)^6$; **в)** $(1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.

5. Изврши го степенувањето:

а) $(1+i\sqrt{3})^{30}$; **б)** $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{20}$.

5.5. Коренување на комплексни броеви

Сега ќе покажеме како може да се определи корен од комплексен број зададен во тригонометриска форма, што во голема мера ја олеснува постапката во однос на пресметувањето на корен од комплексен број зададен во алгебарска форма.

Да најдеме n -ти корен од комплексен број $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Да претпоставиме дека бараниот n -ти корен е некој комплексен број $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ со модул ρ и аргумент θ .

Ако бројот w постои, тој мора да ја задоволува релацијата $w^n = z$, односно $[\rho(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, односно

$$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Оттука, врз основа на критериумот за еднаквост на два комплексни броја во тригонометриска форма, следуваат релациите: $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, или

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

За модулот ρ добиваме единствена ненегативна вредност $\rho = \sqrt[n]{r}$, бидејќи $\sqrt[n]{r}$ го разгледуваме како аритметички корен. Меѓутоа, за аргументот θ на бараниот комплексен број w се добиваат бесконечно многу вредности, во зависност од целиот број k . Според тоа, бараниот комплексен број w (n -ти корен од дадениот комплексен број z), ќе биде:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

каде што со w_k ја означуваме онаа вредност на w што му одговара на избраниот цел број k .

Меѓутоа, за различни вредности на k не секогаш ќе добиваме и различни комплексни броеви w_k . Всушност, при зголемување на k за 1, аргументот

$$\theta_k = \text{Arg } w_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

ќе се зголеми за $\frac{2\pi}{n}$ радијани, а при зголемување на k за n единици, ќе се зголеми за 2π . Но, бидејќи тригонометриските функции синус и косинус се периодични со најмал период 2π , имаме $w_{k+n} = w_k$.

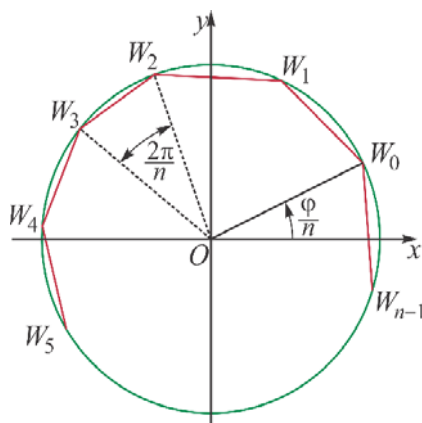
Значи $\sqrt[n]{z} = w_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ каде што

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

Според тоа, n -ти корен од кој било комплексен број (реален или имагинарен) одговара на n различни комплексни броеви, кои се добиваат од формулата за $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, т.е. $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$.

Посебно кај n -ти корен од имагинарен број сите n броеви се имагинарни броеви, а кај n -тиот корен од реален број a , од сите n различни броеви, реални се само два, еден или ниту еден, во зависност од знакот на a и парноста на n .

Забележуваме дека модулите на сите n вредности на w_k во формулата (1) се еднакви на $\sqrt[n]{r}$, а аргументите: $\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi+2\pi}{n}, \frac{\varphi+4\pi}{n}, \dots$ се разликуваат еден од друг за $\frac{2\pi}{n}$. Тоа значи дека точките што одговараат на сите n -ти корени од комплексниот број z лежат на кружница со центар во координатниот почеток и радиус $\rho = \sqrt[n]{r}$, а кружницата ја делат на n складни лаци (цртеж 1).



Цртеж 1

Според тоа, сите n вредности на n -тиот корен од комплексен број $z \neq 0$ (реален или имагинарен) во комплексната рамнина претставуваат темиња на еден правилен n -аголник што е впишан во кружница со радиус $\sqrt[n]{r}$ и центар во почетокот O .

Пример 1. Да го одредиме множеството комплексни броеви $\sqrt[3]{i}$.

Бидејќи $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ вредности на $\sqrt[3]{i}$ ги добиваме од формулата

$$w_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \quad \text{за } k = 0, 1, 2.$$

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = \\ &= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \end{aligned}$$

$$w_2 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i \cdot 1 = -i.$$

Според тоа, имаме дека $\sqrt[3]{i} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \right\}$.

Пример 2. Да го одредиме множеството комплексни броеви $\sqrt[3]{-8}$. Заради $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$, множеството $\sqrt[3]{-8}$ ги добиваме од равенството:

$$w_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2.$$

$$w_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$w_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2,$$

$$\begin{aligned} w_2 &= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) \right) = \\ &= 2(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3}, \end{aligned}$$

Според тоа, имаме дека $\sqrt[3]{-8} = \{1 + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}\}$.

Пример 3. Да ги најдеме сите броеви на множеството $\sqrt[4]{-2 + 2i\sqrt{3}}$. Заради $-2 + 2i\sqrt{3} = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$, каде $r = \sqrt{4 + 12} = 4$ и $\varphi = \arctg \frac{2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\pi}{3}$, бараните броеви се:

$$w_k = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

$$w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$w_1 = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right),$$

$$w_2 = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{6} + \pi) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \pi) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right),$$

$$w_3 = \sqrt{2} \left(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right).$$

Задачи

1. Пресметај: а) $\sqrt{8}$;

б) $\sqrt[3]{-i}$;

в) $\sqrt[3]{2i}$.

2. Пресметај: а) $i^{\frac{3}{4}}$;

б) $(\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{3}}$;

в) $(\sqrt{3} - i)^{\frac{4}{5}}$.

3. Пресметај: а) $\sqrt[6]{(-6 + i6\sqrt{3})}$;

б) $\sqrt{2i}$;

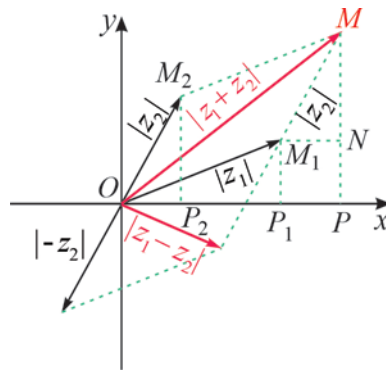
в) $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}}$.

4. Пресметај: а) $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}$

б) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$.

5.6. Примена на комплексни броеви

Овде ќе разгледаме неколку последици од различните форми на запишување и геометрииска интерпретација на даден комплексен број. Тие последици се користат во многу различни области од математиката и со нивна помош поедноставно се согледуваат одредени врски, се одредуваат еквивалентни записи, како и решенија на одредени видови равенки.



Цртеж 1

Од триаголникот OM_1M , чии страни се $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1 + z_2|$ (цртеж 1) следуваат следниве важни неравенства:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

т.е. модулот на збирот од два комплексни броја е помал или еднаков на збирот од модулите на собороците, но е поголем или еднаков на разликата од тие модули. Овие неравенства се во полна согласност со познатата теорема во елементарната геометрија за односот меѓу страните на триаголникот. Од тоа што $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ и $|-z_2| = |z_2|$ следуваат и неравенствата:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

т. е. за модулот на разликата на два комплексни броја важат исти такви неравенства како и за модулот на збирот. Тоа е разбирливо кога се има предвид дека $|z_1 - z_2|$ - должина на другата дијагонала на паралелограмот OM_1MM_2 е, исто така, страна на триаголник, чии други две страни се $|z_1|$ и $|z_2|$ (цртеж 1).

Знак за равенство ќе важи само во посебен случај кога точките O, M_1, M_2 лежат на една права.

Пример 1. Да го одредиме множеството точки z во комплексната рамнина кои го задоволуваат условот;

а) $|z - a| = r$, $r > 0$ каде што a е фиксна точка од истата рамнина, а r е позитивен реален број,

б) $|z - a| = |z - b|$, $a \neq b$, каде што a и b се фиксни точки од истата рамнина.

Нека z_1 и z_2 се две точки на комплексната рамнина. Тогаш $|z_1 - z_2|$ или $|z_2 - z_1|$ е должината на дијагоналата M_1M_2 на паралелограмот OM_1MM_2 (цртеж 1) што ги сврзува точките z_1 и z_2 , односно, растојанието меѓу тие две точки.

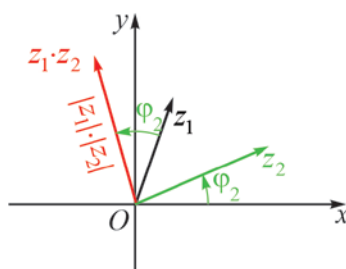
Според тоа, $|z - a|$ е растојанието на променливата точка z од една фиксна точка a во комплексната рамнина. Оттука следува дека множеството точки што го задоволуваат условот:

а) $|z - a| = r, r > 0$ е кружница со центар во точката a и радиус r ;

б) $|z - a| = |z - b|, a \neq b$ е симетралата на отсечката чии крајни точки се фиксните точки a и b .

Да се задржиме сега на геометриската интерпретација на множењето и делењето на комплексните броеви.

Точката што соодветствува на производот $z_1 \cdot z_2$ на комплексните броеви $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ ќе ја добиеме ако прво радиус векторот што одговара на z_1 го ротираме околу почетокот O во позитивна насока за агол $\varphi_2 = \text{Arg } z_2$, а потоа модулот на тој вектор $|z_1| = r_1$ го зголемиме за $r_2 = |z_2|$ пати (при $0 \leq r_2 < 1$ тоа е намалување) (цртеж 2).

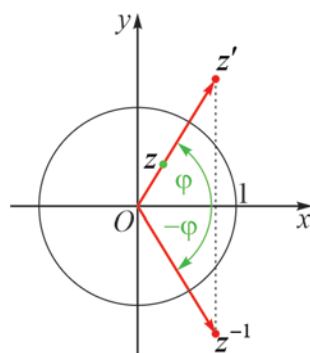


Цртеж 2

Секој количник $\frac{w}{z}$ може да го запишеме како производ $\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = w \cdot z^{-1}$,

па затоа е доволно да покажеме како од точката z ја добиваме точката $\frac{1}{z} = z^{-1}$.

Точката z^{-1} ќе ја добиеме ако од точката z прво преминеме во точката z' која лежи на растојание r^{-1} од почетокот O на истата полуправа, на која лежи и точката z (цртеж 3), а потоа преминуваме кон точката што со z' е симетрична во однос на реалната оска (цртеж 3). Тоа е бараната точка z^{-1} . Очигледно е дека точката z' ќе се совпадне со z ако и само ако $|z| = 1$. Потоа, ако z лежи во внатрешноста на единичниот круг, тогаш z' ќе лежи надвор од него, и обратно.



Цртеж 3

Од посебен интерес и важност е n -тиот корен од бројот 1. Множеството корени има n различни комплексни броеви наречени **примитивни корени** на бројот 1.

Од тоа што $1 = \cos 0 + i \sin 0$ примитивните корени на бројот 1 се зададени со формулата:

$$E_k = \sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1.$$

Реалните вредности на $\sqrt[n]{1}$ се добиваат за:

- $k = 0$ и $k = \frac{n}{2}$, ако n е парен број;
- $k = 0$, ако n е непарен број.

Точките што им соодветствуваат на сите броеви од множеството $\sqrt[n]{1}$ лежат на кружницата со центар во почетокот O и радиус $r=1$. Тие кружницата ја делат на n еднакви лаци, а една од нив што му одговара на бројот 1 е Ox -оската. Оттука следува дека точките што им одговараат на имагинарните броеви од множеството $\sqrt[n]{1}$ се симетрични во однос на реалната оска. Значи броевите од множеството $\sqrt[n]{1}$, што не се реални, се по парови конјугирано комплексни.

Пример 2. а) Квадратниот корен од единицата има две вредности: 1 и -1 .

б) Четвртиот корен од единицата има четири вредности: $1, i, -1, -i$ т.е. множеството од сите 4-ти корени на единицата е $E_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

в) Кубните корени од единицата ги наоѓаме по формулата

$$E_k = \sqrt[3]{1} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Освен $\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$, множеството $\sqrt[3]{1}$ ги содржи и броевите:

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 2. Да го одредиме множеството $\sqrt[6]{1}$.

$$E_6 = \left\{ 1, \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

Забележуваме дека секој кубен корен од единицата е и 6-ти корен од единицата, но не секој 4-ти корен од единицата е и 6-ти корен на единицата.

Пример 3. Да го најдеме комплексниот број $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2(-1-i)} \right)^{12}$.

Дадениот израз го претставува комплексниот број $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{12}$ каде $z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

и $z_2 = -1 - i$. За комплексниот број z_1 имаме

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

од каде што следува дека $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$. Но, знаеме дека и $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$ што укажува на фактот дека треба да се внимава при одредување на аголот φ_1 . Кој агол ќе го земеме зависи од положбата на точката (x, y) во координатната рамнина, која одговара на комплексниот број z_1 . Овде ја имаме точката $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, а тоа е во прв квадрант, значи $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$. Забележуваме уште дека $\frac{4\pi}{3} \notin (-\pi, \pi]$. За комплексниот број z_2 имаме: $r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Притоа точката $(-1, -1)$ е во трет квадрант, па $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$. Значи имаме дека

$$\begin{aligned} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} &= \frac{(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^{12}}{(\sqrt{2})^{12} \cdot (\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})^{12}} = \frac{\cos \frac{12\pi}{3} + i \sin \frac{12\pi}{3}}{2^6 (\cos \frac{60\pi}{4} + i \sin \frac{60\pi}{4})} = \\ &= \frac{\cos 4\pi + i \sin 4\pi}{64(\cos 15\pi + i \sin 15\pi)} = \frac{1 + i \cdot 0}{64(-1 + i \cdot 0)} = -\frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Пример 4. Да докажеме дека $\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n\alpha}{1-i \operatorname{tg} n\alpha}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{R}$.

Имаме дека

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}\right)^n &= \frac{\left(1+i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^n}{\left(1-i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^n} = \frac{\frac{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}{\cos^n \alpha}}{\frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n}{\cos^n \alpha}} = \\ &= \frac{\cos n\alpha + i \sin n\alpha}{\cos(-n\alpha) + i \sin(-n\alpha)} = \frac{\frac{\cos n\alpha + i \sin n\alpha}{\cos n\alpha}}{\frac{\cos n\alpha - i \sin n\alpha}{\cos n\alpha}} = \frac{1+i \operatorname{tg} n\alpha}{1-i \operatorname{tg} n\alpha}. \end{aligned}$$

Пример 5. Да ја решиме биномната равенка: $x^5 + 32i = 0$.

Од $x^5 + 32i = 0$ имаме $x = \sqrt[5]{-32i}$. Бројот $-i$ ќе го запишеме во тригонометриска форма, земајќи дека $x^5 = -32i = 32(-i)$.

Заради $-i = \cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ)$ имаме $x^5 = 32(\cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ))$. Тогаш

$$x = 2(\cos(-18^\circ + 72^\circ k) + i \sin(-18^\circ + 72^\circ k)), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$\text{За } k = 0, z_0 = 2(\cos 18^\circ - i \sin 18^\circ) = 1,90 - i 0,62.$$

$$\text{За } k = 1, z_1 = 2(\cos 54^\circ + i \sin 54^\circ) = 1,18 - i 1,62.$$

$$\text{За } k = 2, z_2 = 2(\cos 126^\circ + i \sin 126^\circ) = -1,18 - i 1,62.$$

$$\text{За } k = 3, z_3 = 2(\cos 198^\circ + i \sin 198^\circ) = -1,18 - i 1,62.$$

$$\text{За } k = 4, z_4 = 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -2i.$$

Пример 6. Најди ги збирите:

$A = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$ и $B = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$, за $n \in \mathbb{N}$.

Нека $z = A + iB$. Тогаш $A = \operatorname{Re}(z)$ и $B = \operatorname{Im}(z)$. Од

$$\begin{aligned} z = A + iB &= (\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) + i(\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) = \\ &= (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx) = \\ &= (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + \dots + (\cos x + i \sin x)^n = \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^n}{1 - (\cos x + i \sin x)} = \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (\cos nx + i \sin nx)}{1 - (\cos x + i \sin x)} = \\ &= (\cos x + i \sin x) \frac{1 - (\cos nx + i \sin nx)}{(1 - \cos x) - i \sin x} \cdot \frac{(1 - \cos x) + i \sin x}{(1 - \cos x) + i \sin x} = \\ &= \frac{[1 - (\cos nx + i \sin nx)][(\cos x - 1) + i \sin x]}{2(1 - \cos x)}. \end{aligned}$$

по извршување на назначените операции со примена на адиционите формули добиваме дека

$$z = A + iB = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + i \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

од каде што следува дека

$$A = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \text{ и } B = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Задачи

1. Како се распоредени векторите коишто им одговараат на комплексните броеви z_1 и z_2 , ако:

$$\text{а) } |z_1 - z_2| = |z_1| - |z_2|; \quad \text{б) } |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

2. Докажи дека броевите $(a + bi)^n$ и $(a - bi)^n$, $n \in \mathbb{N}$ се конјугирано комплексни.

3. Докажи дека количникот на кои било два броја од множеството $\sqrt[n]{1}$ е пак број од множеството $\sqrt[n]{1}$.

4. Докажи дека реципрочната вредност на кој било број од множеството $\sqrt[n]{1}$ е пак број од множеството $\sqrt[n]{1}$.

5. Реша ја равенката $\frac{z^3}{32} - \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 0$.

6. Запиши го во алгебарска форма комплексниот број

$$z = (1 + \cos \alpha - i \sin \alpha)^{10}.$$

7. Реши ја равенката $z^4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) - z^4 - \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = 0$.

8. Докажи дека:

а) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$; б) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6} \right)$.

9. Реши ги биномните равенки:

а) $z^3 - 8 = 0$; б) $z^6 + 64 = 0$; в) $z^4 - 81 = 0$.

10. Најди ги конечните зборови:

а) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx$; б) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Претстави ги со вектори комплексните броеви z_1 и z_2 , а потоа одреди го нивниот збир, ако:

а) $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 3 + 2i$; б) $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$;
в) $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = -2 - 3i$; г) $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 3 - i$.

2. Одреди ја геометриски разликата на z_1 и z_2 , ако:

а) $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 1 - i$; б) $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = -5 + 2i$;
в) $z_1 = -2 - 4i$, $z_2 = -5 - 2i$; г) $z_1 = 6 - 2i$, $z_2 = 2 + 3i$.

3. Одреди го модулот на комплексните броеви:

а) $12 - 5i$; б) $-\sqrt{3} + i$; в) $1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)i$;
г) $\sin \varphi - i \cos \varphi$; д) $-2i$; е) $1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$.

4. Одреди го растојанието меѓу точките во рамнината, кои ги претставуваат комплексните броеви:

а) $1 - i$ и $-2 + 3i$; б) $5 - i$ и $-3 + 5i$; в) 1 и $\cos \varphi - i \sin \varphi$.

5. Одреди ги точките во комплексната рамнина за кои важи:

а) $|z - i| \leq 1$; б) $|z - 1| = 1$; в) $1 \leq |z| \leq 3$; г) $|z - 1| = |z - 3|$.

6. Претстави ги во тригонометриска форма комплексните броеви:

а) $\sqrt{3} + 1$; б) $-1 - i\sqrt{3}$; в) $-3i$; г) -3 ; д) $3 - 4i$.

7. Шрафирај го множеството точки во рамнината кои соодветствуваат на комплексните броеви со модул r чии аргументите го исполнуваат условот:

а) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, б) $0 < \varphi < \pi$, в) $2 < r < 3$, г) $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

8. Најди ги сите вредности за аргументот φ на комплексниот број:

а) $-1 + i$; б) -1 ; в) $\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$;
г) $1 - i\sqrt{3}$; д) $\operatorname{tg} \varphi + i$; е) $\operatorname{ctg} \alpha + i$.

9. Одреди го производот $z_1 \cdot z_2$, ако:

а) $z_1 = 5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$ и $z_2 = 3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$;

б) $z_1 = 4(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$, и $z_2 = 3(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8})$;

в) $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.

10. Одреди го модулот и аргументот на бројот z^n , ако $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$.

11. Како ќе се промени модулот и аргументот на комплексниот број $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ако се помножи со:

а) i ; б) $-i$; в) 4 ; г) $-2i$; д) $1+i$; е) $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

12. Одреди го $z_1 : z_2$, ако:

а) $z_1 = \cos 130^\circ + i \sin 130^\circ$ и $z_2 = \cos 40^\circ + i \sin 40^\circ$;

б) $z_1 = 2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)$ и $z_2 = 5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)$;

в) $z_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ и $z_2 = 3(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$;

г) $z_1 = \cos 70^\circ + i \sin 70^\circ$ и $z_2 = \cos 100^\circ + i \sin 100^\circ$.

13. Изврши го степенувањето:

а) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^3$; в) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$; г) $(-1+i)^{-5}$.

14. Пресметај:

а) $\frac{(i-1)^7}{(1+i)^5}$; б) $\frac{(1+i)^8 - (1-i)^4}{(\sqrt{3}+i)^6}$; в) $\frac{(1-i)^{-8}}{(1+i\sqrt{3})^6}$; г) $(\sqrt{3}+i)^{10} + (\sqrt{3}-i)^{10}$.

15. Провери ги равенствата:

а) $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$; б) $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$.

16. Најди ги корените на равенките:

а) $x^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 20 = 0$.

17. Реша ги квадратните равенки:

а) $x^2 - 4x + 20 = 0$; б) $x^2 + 3x + 8 = 0$; в) $2x^2 - 7x + 10 = 0$;

г) $z^2 + z + 1 = 0$; д) $x^2 - (1+i)x + i = 0$.

18. Состави квадратни равенки со реални коефициенти чии корени се:

а) $x_1 = 2+i$, $x_2 = 2-i$; б) $x_1 = i\sqrt{5}$, $x_2 = -i\sqrt{5}$.

19. Состави квадратна равенка со реални коефициенти, ако еден од корените е:

а) $2+3i$; б) $12-13i$; в) $1+\cos \alpha + i \sin \alpha$.

20. Реша ги равенките:

а) $z^2 + 27 = 0$; б) $z^5 - 1 = 0$; в) $z^7 + 1 = 0$;

г) $36z^4 - 25 = 0$; д) $z^6 + 64 = 0$; е) $z^3 - 2i = 0$.

е) $z^5 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$, ж) $z^8 - \sqrt{3} + i = 0$, з) $z^7 + 1 - i = 0$.

6. РЕШАВАЊЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИАГОЛНИК

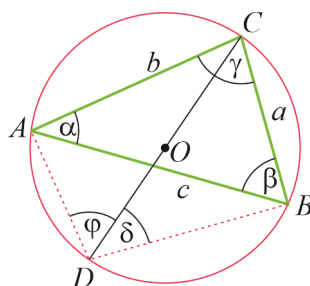
При решавање на правоаголен триаголник, врска помеѓу страните и агли е дадена врз основа на дефиницијата на секоја тригонометриска функција од остар агол во правоаголен триаголник. Тие врски не може да ги користиме за косоаголен триаголник, бидејќи во него нема прав агол.

Пресметувањето на непознатите елементи на триаголник, кога се дадени бројните вредности на оние три основни елементи кои се потребни за конструирање на триаголник, се вика **решавање на триаголник**.

Меѓутоа, за да може да решиме и косоаголен триаголник, треба да најдеме соодветни врски помеѓу страните и агли во таквиот триаголник. Заради тоа, ќе ги докажеме синусната и косинусната теорема, врз основа на кои се воспоставува врска меѓу страните и агли кај кој било триаголник.

6.1. Синусна теорема

Нека е даден триаголникот ABC (цртеж 1) околу кој е опишана кружница со дијаметар $2R = \overline{CD}$. Ако точката D ја поврземе со точките B и A , добиваме правоаголници BCD и ACD .



Цртеж 1

Според дефинициите на тригонометриски функции во правоаголен триаголник, од правоаголниот триаголник BCD имаме дека

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \sin \delta \quad \text{или} \quad \frac{a}{2R} = \sin \alpha,$$

каде што $\delta = \alpha$, како периферни агли над ист лак BC .

Равенството $\frac{a}{2R} = \sin \alpha$ може да го запишеме во облик

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$

Од правоаголниот триаголник ACD имаме

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \sin \varphi \quad \text{или} \quad \frac{b}{2R} = \sin \beta$$

кадешто $\varphi = \beta$ како периферни агли над ист лак AC .

Равенството $\frac{b}{2R} = \sin \beta$ може да го запишеме во облик

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R.$$

На сличен начин, повлекувајќи го дијаметарот од темето А, добиваме

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Според тоа, имаме дека

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

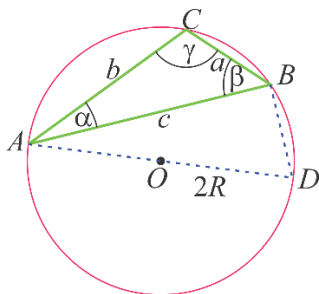
што значи дека размерот на секоја страна и синусот од спротивниот агол на таа страна во триаголникот е константен број и е еднаков на дијаметарот на опишаната кружница на триаголникот.

Продолжената пропорција може да ја запишеме во следниот облик:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Синусна теорема: Страните во произволен триаголник се пропорционални со синусите од нивните спротивни агли.

Синусната теорема ја докажавме во случај кога триаголникот ABC е остроаголен. На сличен начин може да докажеме дека теоремата е точна и во случај кога триаголникот ABC е тапоаголен (цртеж 2). Според тоа, синусната теорема е точна за произволен триаголник.



Цртеж 2

Пример 1. Да го одредиме односот на страните $a : b$, $a : c$ и $b : c$ на триаголникот ABC , ако:

а) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$;

б) $\alpha = 75^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

а) Врз основа на синусната теорема, имаме дека

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ и}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{б) } \frac{a}{b} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{6}$$

$$\text{и } \frac{b}{c} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Синусната теорема се користи при решавање на триаголник, и тоа во следниве два случаја:

- I. Кога се зададени една страна и двата агла кои лежат на таа страна,
- II. Кога се зададени две страни и аголот спроти една од дадените страни.

I случај: Реши го триаголникот ако е зададена страната a и аглите β и γ кои лежат на страната a .

Третиот агол во триаголникот е $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.

За страните b и c од синусната теорема имаме дека

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{и} \quad c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Пример 2. Одреди ги аголот α и страните b и c , ако $\beta = 36^\circ$, $\gamma = 68^\circ$ и страната $a = 160\text{cm}$.

Од $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ добиваме дека $\alpha = 76^\circ$. Должината на страната b ја пресметуваме од равенството:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{160 \cdot \sin 36^\circ}{\sin 76^\circ} = 96,925\text{cm},$$

додека страната c ја пресметуваме од равенството:

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{160 \cdot \sin 68^\circ}{\sin 76^\circ} = 152,8896\text{cm}.$$

II случај: Реши го триаголникот со страни b и c и агол β .

Прво го наоѓаме аголот γ од равенството:

$$\sin \gamma = \frac{c}{b} \sin \beta$$

а потоа аголот α од равенството $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$. Страната a ја наоѓаме од равенството:

$$a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

При решавање на задачите од овој вид можни се следниве случаи:

а) Ако $b > c$, тогаш $\beta > \gamma$ (бидејќи $\beta + \gamma < \pi$), од каде што заклучуваме дека аголот γ е остар. Тогаш $\frac{c}{b} < 1$. Заради $\sin \beta \leq 1$, добиваме дека и $\sin \gamma < 1$, па задачата има едно решение за γ , α и a .

б) Ако $b < c$, односно $\frac{c}{b} > 1$, тогаш $\beta < \gamma$, па аголот γ може да биде остар, прав или тап. Во тој случај може да имаме дека

✓ ако $\frac{c}{b} \cdot \sin \beta > 1$, тогаш и $\sin \gamma > 1$. Последното неравенство е невозможно, па според тоа задачата нема решение;

✓ ако $\frac{c}{b} \cdot \sin \beta = 1$, тогаш и $\sin \gamma = 1$, од каде што следува дека $\gamma = 90^\circ$. Во овој случај триаголникот е правоаголен;

✓ Ако $\frac{c}{b} \cdot \sin \beta < 1$, тогаш и $\sin \gamma < 1$, па аголот γ е остар, прав или тап. Задачата има две решенија за γ , па според тоа и по две решенија за α и a .

Пример 3. Реши го триаголникот со страни $a = 2, c = 1$ и агол $\gamma = 50^\circ$.

Од равенството $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$ имаме $\sin \alpha = 2 \sin 50^\circ \approx 1,53$. Бидејќи не постои агол α за кој $\sin \alpha > 1$, следува дека таков триаголник не постои.

Пример 4. Реши го триаголникот зададен со $a = 50\text{cm}$, $b = 32\text{cm}$ и $\alpha = 73^\circ$.

Бидејќи $a > b$, задачата има едно решение за аголот β , па и за γ и c . Аголот β го добиваме од:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \alpha = \frac{32}{50} \cdot \sin 73^\circ,$$

од каде добиваме $\beta \approx 37^\circ 49'$, $\gamma = 69^\circ 11'$ и $c \approx 48,87\text{cm}$.

Пример 5. Реши го триаголникот зададен со $b = 14\text{cm}$, $c = 26\text{cm}$, $\beta = 32^\circ$.

Аголот γ го пресметуваме од равенството $\sin \gamma = \frac{c}{b} \sin \beta = \frac{26}{14} \sin 32^\circ$.

Бидејќи се дадени две страни и аголот наспроти помалата страна и $\sin \gamma < 1$, добиваме две решенија:

$$\gamma_1 \approx 79^\circ 52', \quad \gamma_2 \approx 100^\circ 8', \quad \alpha_1 \approx 68^\circ 8', \quad \alpha_2 \approx 47^\circ 52', \quad a_1 \approx 24,53\text{cm}, \quad a_2 \approx 19,59\text{cm}.$$

Задачи

1. Реши го триаголникот зададен со $a = 31, \alpha = 54^\circ 15', \beta = 76^\circ 20'$.

2. Реши го триаголникот зададен со $c = 10, \alpha = 62^\circ 22', \beta = 28^\circ 52'$.

3. Реши го триаголникот зададен со $a = 12, c = 15, \gamma = 20^\circ 20'$.

4. Аглите во еден триаголник се однесуваат како $3:4:8$. Колку изнесува односот на најдолгата и најкусата страна на триаголникот?

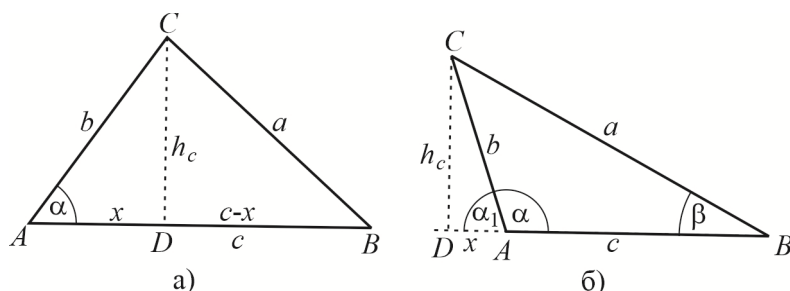
5. Во триаголникот $\triangle ABC$ повлечена е тежишната линија AK . Нејзината должина е $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ и таа со страната AC образува агол од 30° . Одреди ја должината на страната BC ако $\angle ACB = 45^\circ$.

6. Во $\triangle ABC$ дадено е $\overline{AB} = 24\text{cm}$, $\overline{AC} = 9\text{cm}$ и $\alpha = 60^\circ$. Одреди ја должината на страната BC и радиусот на опишаната кружница.

6.2. Косинусна теорема

Нека е даден остроаголен триаголник ABC (цртеж 1 а). Со помош на Питагоровата теорема ќе ја изразуваме висината h_c прво од триаголникот ADC а потоа од триаголникот BCD

$$h_c^2 = b^2 - x^2 \quad \text{и} \quad h_c^2 = a^2 - (c-x)^2$$



Цртеж 1

Од еднаквоста на левите страни на двете равенства следува дека

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \quad (1)$$

Од триаголникот ADC имаме дека $x = b \cos \alpha$. Со замена во (1), добиваме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Равенството е точно и кога аголот α е тап (цртеж 1 б). Во тој случај имаме

$$\begin{aligned} a^2 &= h_c^2 + (c+x)^2 = (b \sin \alpha_1)^2 + (c+b \cos \alpha_1)^2 = \\ &= b^2 \sin^2 \alpha_1 + c^2 + 2bc \cdot \cos \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1 = \\ &= b^2 (\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1) + c^2 + 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha_1) = \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

На сличен начин, ако ги изразиме висините h_a и h_b , ќе добиеме дека

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

Косинусна теорема. Нека a, b и c се страните и α, β и γ соодветните спротивни внатрешни агли во $\triangle ABC$. Тогаш важат равенствата:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Да воочиме дека во случај кога $\alpha = \frac{\pi}{2}$, равенството е всушност Питагоровата теорема.

Со помош на косинусната теорема решаваме триаголник, ако се дадени:

I случај: Две страни и аголот помеѓу нив.

Пример 1. Решај го триаголникот зададен со $a = 2\text{cm}$, $b = 1\text{cm}$, $\gamma = 60^\circ$.

Прво ја пресметуваме страната c

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma} = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cos 60^\circ} = \\ &= \sqrt{4 + 1 - 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ cm}. \end{aligned}$$

За аголот α од равенството $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$ добиваме дека

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3}} = 0$$

од каде следува дека $\alpha = 90^\circ$. Оттука имаме дека

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 30^\circ.$$

II случај: Трите страни на триаголникот.

Пример 2. Реша го триаголникот ако $a = 1 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$ и $c = \sqrt{3} \text{ cm}$.

Од косинусната теорема следува дека:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1 + 3 - 4}{2\sqrt{3}} = 0,$$

од каде се добива $\beta = 90^\circ$. Слично,

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 3 - 1}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

од каде следува дека $\alpha = 30^\circ$. Конечно $\gamma = 60^\circ$.

Задачи

1. Реша го триаголникот зададен со $b = 18, c = 13, \alpha = 44^\circ 30'$.
2. Реша го триаголникот зададен со $a = 738, b = 739, \gamma = 60^\circ 15'$.
3. Реша го триаголникот зададен со $a = 15, b = 12, c = 18$.
4. За страните на $\triangle ABC$ важи $a : b = 2 : 3, b : c = 4 : 5$. Одреди ја големината на најголемиот агол во триаголникот?
5. Одреди ја големината на аголот α , ако за должините на страните на еден триаголник важи $\frac{(b+c)^2 - a^2}{bc} = 1$.
6. Одреди ги страните на триаголникот со плоштина $3\sqrt{3}$, $\alpha = 60^\circ$ и збир на страните кои го зафаќаат тој агол $b + c = 7$.

6.3. Тангенсна теорема. Ојлерови формули

Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ и $\frac{b}{\sin \beta} = 2R$, па $a = 2R \sin \alpha$ и

$$b = 2R \sin \beta. \text{ Тогаш } \frac{a+b}{a-b} = \frac{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta} = \frac{2R(\sin \alpha + \sin \beta)}{2R(\sin \alpha - \sin \beta)}$$

Ако ги примениме формулите за трансформација на збир и разлика во производ т.е. $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$ се добива:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta}{2R \sin \alpha - 2R \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$$

на овој начин ја докажавме следната теорема.

Тангенсна теорема. Нека a, b се страни на $\triangle ABC$ и α, β се соодветните

спротивни агли. Тогаш $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$

Забелешка. Од тоа што $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ и $\operatorname{tg}(180^\circ - \gamma) = \operatorname{ctg} \gamma$, тогаш тан-

генсната теорема гласи $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}.$

Пример 1. Решај го триаголникот ако $a + b = 13$, $\alpha = 81^\circ$, $\beta = 38^\circ$.

Прво може да го одредиме аголот $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 61^\circ$.

Од тангенсната теорема имаме $\frac{13}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{119^\circ}{2}}{\operatorname{tg} \frac{43^\circ}{2}}$ т.е. $a - b = 3$. Со решавање

на системот $\begin{cases} a+b=13 \\ a-b=3 \end{cases}$ се добива $a=8, b=5$, а со примена на синусната теорема имаме дека $c=7$.

Пример 2. Пресметај ги аглите во триаголникот, ако $a:b=5:3$ и $\alpha + \beta = 155^\circ$.

Аголот $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 25^\circ$. Ако од $\frac{a}{b}$ додадеме 1, односно одземеме

1, се добива $\frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b} = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$ и $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} = \frac{2}{3}$ т.е.

$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{2} = 4$. Значи од тангенсната теорема имаме $\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}} = 4$ т.е.

$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \approx 1,12768$, па $\frac{\alpha - \beta}{2} = 48,5^\circ$. Со решавање на системот $\begin{cases} \alpha + \beta = 155^\circ \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = 48,5^\circ \end{cases}$

се добива дека $\alpha = 126^\circ, \beta = 29^\circ$.

Познато е дека $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Имаме

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)} = \\ &= \frac{a^2 - (b - c)^2}{(b + c)^2 - a^2} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{(a + b + c)(b + c - a)} = \frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)} \end{aligned}$$

каде $s = \frac{a + b + c}{2}$. На овој начин ја добивме формулата $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}$.

Според тоа, **Ојлерови формули** гласат:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - c)}{s(s - b)}} \text{ и } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{s(s - c)}}.$$

Пример 3. Докажи дека $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s - a}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s - b}$ и $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s - c}$, каде r е радиус на впишаната кружница.

Познато е дека $r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}}{s} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}$, па
имаме $r = \sqrt{\frac{(s - a)^2(s - b)(s - c)}{s(s - a)}} = (s - a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Значи $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s - a}$.

Слично се добиваат другите две равенства.

Пример 4. Реша го триаголникот ABC ако $r = \sqrt{3}$, $s - c = 3$ и $\alpha = 31^\circ$.

Од формулата $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s - c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ следува дека $\frac{\gamma}{2} = 30^\circ$ т.е. $\gamma = 60^\circ$. Според тоа, $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 89^\circ$ и $s - a = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, па $s - a \approx 6$. Вредноста на страната

$$b = s - c + s - a = 9, \text{ а } a = \frac{9 \sin 31^\circ}{\sin 89^\circ} \approx 4,5 \text{ и } c = 7,79.$$

Задачи

1. Реша го триаголникот зададен со $a + c = 28$, $\beta = 60^\circ$ и $\gamma = 68^\circ$.
2. Реша го триаголникот зададен со $a - b = 8$, $\alpha = 40^\circ$ и $\beta = 30^\circ$.
3. Реша го триаголникот зададен со $a = 5$, $b = 3$ и $\gamma = 96^\circ$.
4. Реша го триаголникот зададен со $a = 52$, $b = 39$ и $c = 37$.
5. Реша го триаголникот зададен со $a = 19$, $b = 17$ и $c = 23$.
6. Реша го триаголникот ABC ако $r = 5\sqrt{3}$, $s - a = 5$ и $\gamma = 60^\circ$.

6.4. Примена на теоремите во планиметрија

Многу од формулите во планиметрија можат да се докажат со помош на тригонометрија. Посебно со примена на синусна и косинусна теорема.

Пример 1. Нека a, b, c се страни и α, β, γ се соодветните агли во триаголникот ABC (цртеж 1) со полупериметар $s = \frac{L}{2} = \frac{a+b+c}{2}$, плоштина P и радиус на опишаната кружница R . Докажи дека

$$P = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2}, \quad P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{и} \quad R = \frac{abc}{4P}.$$

Плоштината на триаголникот ABC е еднаква на $P = \frac{ch_c}{2}$, а во правоаголниот триаголник C_1BC важи $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$, па $h_c = a \sin \beta$, од каде што имаме дека

$$P = \frac{ac \sin \beta}{2}.$$

Слично се добива дека $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ и $P = \frac{bc \sin \alpha}{2}$.

Од косинусната теорема следува дека $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ и од

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{2ac}.$$

Со замена во формулата за

плоштина се добива

$$\begin{aligned} P &= \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{ac}{2} \frac{\sqrt{(2ac - (a^2 + c^2 - b^2))(2ac + (a^2 + c^2 - b^2))}}{2ac} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{(b-(a-c))(b+(a-c))(a+c-b)(a+c+b)} \end{aligned}$$

Сега со смените $a+b=2s-c$, $a+c=2s-b$ и $b+c=2s-a$ се добива

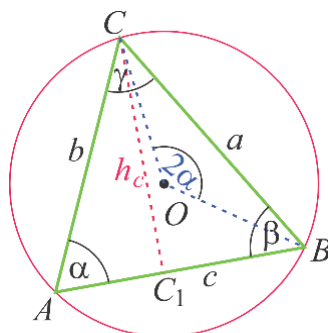
$$P = \frac{1}{4} \sqrt{2^4 s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Нека O е центарот на опишаната кружница за ABC (цртеж 1). Тогаш $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$, како централен и периферен агол над ист лак. Со примена на косинусната теорема на $\triangle BOC$ се добива

$$\begin{aligned} a^2 &= R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos 2\alpha = 2R^2 (1 - \cos 2\alpha) = \\ &= 2R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 4R^2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Значи $R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin \alpha}$. Од тоа што $P = \frac{bc \sin \alpha}{2}$ следува дека $\sin \alpha = \frac{2P}{bc}$, па имаме

$$R = \frac{abc}{4P}.$$



Цртеж 1

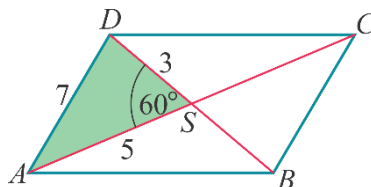
Забелешка. Ако во формулата за плоштина на триаголник $P = \frac{ab \sin \gamma}{2}$, ги изразиме страните a и b од синусната теорема, тогаш се добива

$$P = \frac{2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2} = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Пример 2. Должините на дијагоналите на еден паралелограм (цртеж 2) се 6cm и 10cm , а должината на една негова страна е 7cm . Одреди го остриот агол меѓу дијагоналите на паралелограмот.

Нека $\overline{AC} = 10\text{cm}$, $\overline{BD} = 6\text{cm}$ и пресекот на дијагоналите е точката S (цртеж 2). Со примена на косинусната теорема за $\triangle ASD$ се добива дека

$\cos \varphi = \frac{25 + 9 - 49}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$. Од тука се добива $\varphi = 120^\circ$. Значи остриот агол е $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.



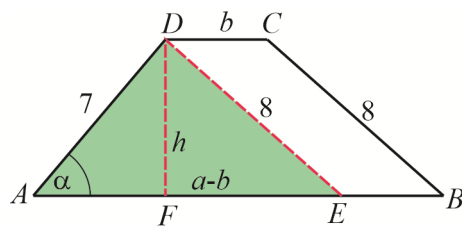
Цртеж 2

Пример 3. Должините на основите на трапезот $ABCD$ (цртеж 3) се 14cm и 3cm , а должините на краците се 8cm и 7cm . Колку изнесува плоштината на трапезот?

Низ точката D повлекуваме права DE која е паралелна со BC . Тогаш $\triangle AED$ има страни $\overline{AE} = a - b = 11\text{cm}$, $\overline{AD} = 7\text{cm}$, $\overline{DE} = 8\text{cm}$. Со примена на косинусната теорема се добива $\cos \alpha = \frac{121 + 49 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{106}{154}$. Висината h на трапезот

ќе ја одредиме од $\triangle AED$. Од $\sin \alpha = \frac{h}{AD}$ имаме дека $h = 7 \cdot \sin \alpha = 5,1\text{cm}$.

Плоштината на трапезот изнесува $P = \frac{\overline{AB} + \overline{AD}}{2} \cdot h = \frac{14 + 3}{2} \cdot 5,1 = 43,35\text{cm}^2$.



Цртеж 3

Задачи

1. Нека P, Q, R се последователни точки во кои некоја права ги сече, соодветно, страните BC, AC, AB (или нивните продолженија) на $\triangle ABC$. Тогаш $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$. (Теорема на Менелаж)

2. Производот на дијагоналите на тетивен четириаголник е еднаков на збирот од производот на спротивните страни. (Теорема на Птоломеј)

3. Периметарот на еден триаголник е 55cm , а два негови агли се $\alpha = 46^\circ 27'$ и $\beta = 63^\circ 15'$. Колкава е плоштината на тој триаголник?

4. Должините на страните на еден триаголник се последователни броеви, а најголемиот агол е двојно поголем од најмалиот. Одреди го периметарот на триаголникот.

6.5. Примена на теоремите во стереометрија

Синусната и косинусната теорема се користат при решавање разни задачи од стереометрија.

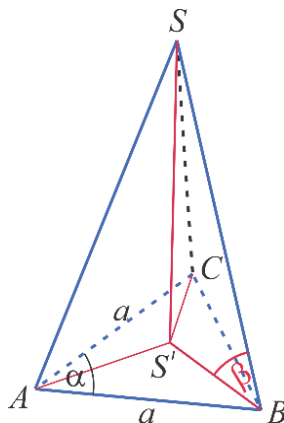
Пример 1. Основата на една пирамида (цртеж 1) е рамнокрак триаголник со крак a и агол при врвот на тој триаголник α . Сите бочни рабови на пирамидата образуваат агол β со рамнината на основата. Одреди го волуменот на пирамидата.

Ако со S го означиме врвот на пирамидата, а со S' пресекот на нормалата повлечена од врвот на основата, тогаш триаголниците ASS' , BSS' и CSS' се складни т.е. $\overline{AS'} = \overline{BS'} = \overline{CS'}$ од каде заклучуваме дека S' е центар на опишаната кружница на основата на пирамидата (цртеж 1). Од синусната

$$\text{теорема } R = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Висината на пирамидата } H = R \operatorname{tg} \beta, \text{ плоштината на основата } B = \frac{a^2 \sin \alpha}{2}$$

$$\text{и } V = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{a^2 \sin \alpha \cdot R \operatorname{tg} \beta}{6} = \frac{a^2 \sin \alpha \cdot \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \operatorname{tg} \beta}{6} = \frac{a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{6}.$$



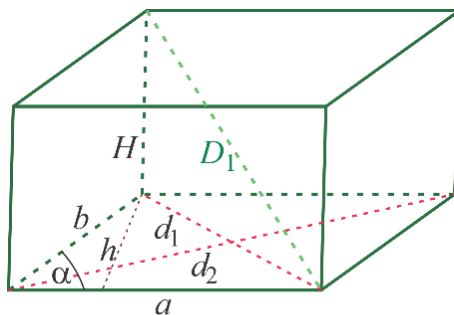
Цртеж 1

Пример 2. Основата на прав паралелопипед (цртеж 2) е паралелограм со страни a и b и остар агол α . Помалата дијагонала на паралелопипедот е еднаква на поголемата дијагонала на основата. Одреди го волуменот на паралелопипедот.

Од условот на задачата $D_1 = d_2$. Основата на паралелопипедот е паралелограм чија плоштина е $P = ah = ab \sin \alpha$. За висината на паралелопипедот имаме $H^2 = D_1^2 - d_1^2$, па $d_2^2 = D_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \alpha)$, а

$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ (цртеж 2). Тогаш $H^2 = 4ab \cos \alpha$ т.е. $H = 2\sqrt{ab \cos \alpha}$.

Плоштината на основата е $B = ab \sin \alpha$, а волуменот е $V = 2ab \sin \alpha \sqrt{ab \cos \alpha}$.



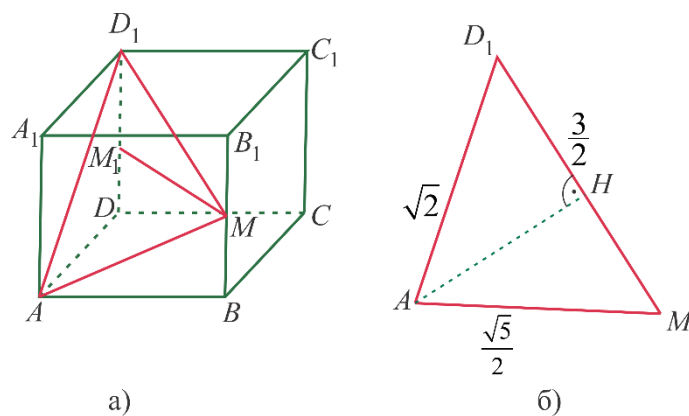
Цртеж 2

Пример 3. Дадена е коцката (цртеж 3 а) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со страна 1. Најди го растојанието од A до правата $D_1 M$ каде M е средина на работ BB_1 .

Од $\triangle ABM$ имаме дека $\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BM}^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Слично, од

$\triangle ADD_1$ добиваме $\overline{AD_1} = \sqrt{2}$ (цртеж 3 а).

Нека M_1 е средина на страната DD_1 . Тогаш триаголникот $D_1 M_1 M$ е правоаголен, па имаме $\overline{D_1 M} = \sqrt{\overline{D_1 M_1}^2 + \overline{M_1 M}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{3}{2}$.



Цртеж 3

Останува да ја најдеме висината во триаголникот AMD_1 . Бидејќи

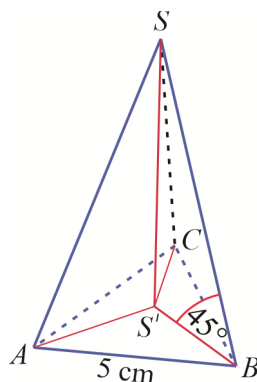
$\overline{D_1M}^2 < \overline{AM}^2 + \overline{AD_1}^2$ следува дека тој триаголник е остроаголен. Имаме

$$\cos \angle D_1MA = \frac{\overline{AM}^2 + \overline{D_1M}^2 - \overline{AD_1}^2}{2 \cdot \overline{D_1M} \cdot \overline{AM}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ од што следува дека } \sin \angle D_1MA = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Според тоа, } \overline{AH} = \overline{AM} \cdot \sin \angle D_1MA = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = 1$$

Задачи

1. Основата на една пирамида (цртеж 4) е рамностран триаголник со страна 5cm. Сите бочни рабови на пирамидата образуваат агол 45° со рамнината на основата. Пресметај го волуменот на пирамидата.



Цртеж 4

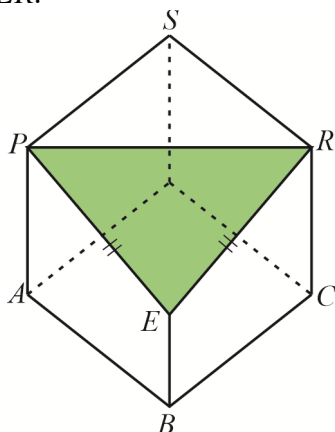
2. Нека $EABCD$ е пирамида со основа паралелограм $ABCD$ со страни 1 и $\sqrt{3}$ и $\angle BAD = 60^\circ$. Подножјето на висината е во пресекот на дијагоналите на основата и важи $\overline{AE} = \sqrt{5 + 0,25 \cdot \sqrt{3}}$. Одреди го волуменот на пирамидата.

3. Во конус е впишана пирамидата $SABC$, со основа ABC така што $\angle ACB = 60^\circ$ и $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$. Висината на конусот е 9. Најди го волуменот на конусот.

4. Телото на цртеж 5 е добиено со отстранување на коше од коцка со раб 24 cm.

а) Пресметај ги должините на отсечките PE и PR .

6) Пресметај го аголот PER .



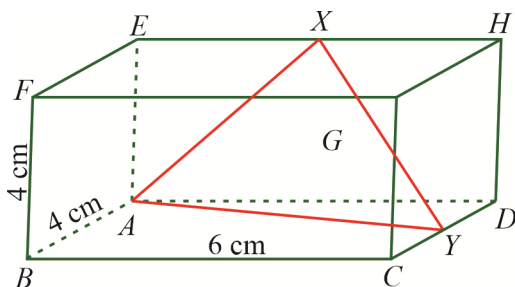
Цртеж 5

5. За паралелопипедот на цртеж 6, X е средина на отсечката EH и Y е средина на отсечката CD .

a) Пресметај ги должините на страните на триаголникот AYX .

б) Пресметај го аголот XAY .

в) Пресметај ја плоштината на триаголникот XAY .

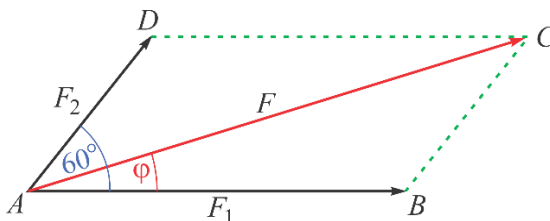


Цртеж 6

6.6. Примена на теоремите во механика и во практичниот живот

Теоремите од тригонометријата имаат широка примена во механиката и воопшто во практичниот живот. Ќе наведеме неколку примери.

Пример 1. Во точката A делуваат две сили $F_1 = 6N$ и $F_2 = 4N$ чии вектори зафаќаат агол од 60° . Одреди го векторот по кој точката A ќе се движи и големината на силата која е резултантна. Одреди го аголот кој резултантната сила го зафаќа со силата F_1 .



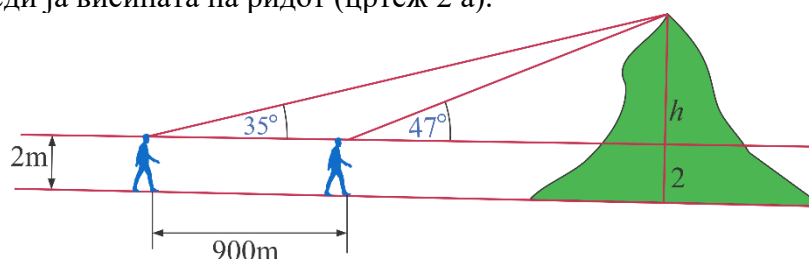
Цртеж 1

Точката A се движи по резултантната сила која е дијагонала на паралелограмот конструиран над векторите F_1 и F_2 (цртеж 1). Од паралелограмот $ABCD$ со помош на косинусната теорема се добива .

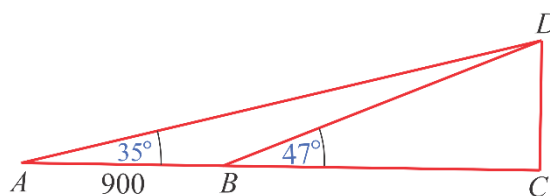
$$|F|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 - 2|\overline{AB}||\overline{BC}|\cos 120^\circ \text{ т.е. } |F|^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 76.$$

Според тоа $|F| = \sqrt{76} \approx 8,7N$. Аголот кој резултантната сила го зафаќа со силата F_1 се добива преку синусната теорема. Ако $\angle BAC = \varphi$, тогаш имаме дека $\sin \varphi = \frac{|\overline{BC}|\sin 120^\circ}{|\overline{AC}|} \approx 0,4$, од каде $\varphi \approx 23^\circ 30'$.

Пример 2. За да ја измери висината на ридот, набљудувач прави две мерење на врвот кои се на растојание од 900 метри. Првото мерење е кога од земјата го мери аголот под кој се гледа врвот и добива 47° , а за второто мерење добива 35° . Ако претпоставиме дека мерната точка е на висина 2 метри од земјата, одреди ја висината на ридот (цртеж 2 а).



а)



б)

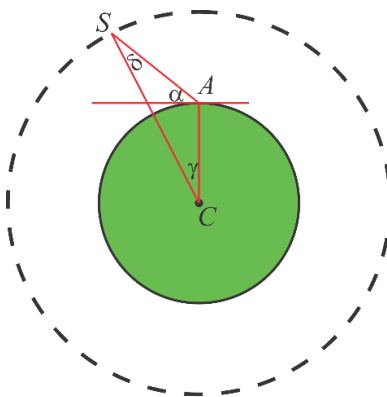
Цртеж 2

Тогаш од $\angle ABD = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$ и $\angle BDA = 180^\circ - 133^\circ - 35^\circ = 12^\circ$ (цртеж 2 б). Од синусната теорема се добива дека $\overline{AD} = \frac{900 \sin 133^\circ}{\sin 12^\circ} \approx 3165,86m$. Со примена на дефиницијата за синус од остар агол имаме дека $\sin 35^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$ т.е. $\overline{CD} = \overline{AD} \sin 35^\circ \approx 1816m$. Висината на ридот изнесува $1816 + 2 \approx 1818m$.

Пример 3. Вештачки сателит се движи на висина h од земјата по кружна патека околу неа (цртеж 3). Поминал над точката A која се наоѓа на земјата и после време од t секунди, забележан е под агол α од таа точка во однос на земјината површина. Одреди го времето потребно за едно полно завртување на сателитот околу земјата.

Ако со C го означиме центарот на земјата, а со S положбата на сателитот за време t , тогаш од $\triangle ASC$ се добива $\sin \angle ASC = \frac{\overline{AC}}{\overline{SC}} \sin(90^\circ + \alpha)$. Бидејќи

$\overline{AC} = R, \overline{SC} = R + h$, тогаш $\sin \angle ASC = \frac{R \cos \alpha}{R + h}$. Времето потребно за едно полно завртување на сателитот околу земјата се добива од формулата за аголна брзина $\omega = \frac{2\pi}{T}, T = \frac{2\pi t}{\gamma}$, па $T = \frac{2\pi t}{90^\circ - \alpha - \arcsin \frac{R \cos \alpha}{R + h}}$.



Цртеж 3

Задачи

1. Во точката A делуваат две сили $F_1 = 12N$ и $F_2 = 18N$ чии вектори зафаќаат агол од 25° . Одреди ја големината на резултантната сила

2. Светлината од светилникот на брод се врти во насока на стрелките на часовникот со постојана брзина од еден вртење во минута. Зракот удира во точка на брегот што е 366 метри од бродот. Четири секунди подоцна, светлината удира во точка 175 метри подалеку од брегот. Колку е далеку бродот од брегот?

3. Група планинари приближувајќи се од запад на растојание од 1250 метри од подножјето на планината, измериле дека аголот до врвот на планината е 35° . Пристигнувајќи во подножјето на планината, планинарите измериле дека аголот до врвот на планината е 48° . Колку метри е висока планината?

4. Два авиони го напуштаат аеродромот во исто време и летаат два часа. Авион А лета во правец од 165° со 385 km/h и авион В лета во правец од 250° со 410 km/h . На колкаво растојание еден од друг ќе бидат по два часа?

5. На една страна од реката обележени се две точки A и B , кои се на растојание 120 m . Најди го растојанието меѓу точките C и D на спротивната страна од реката, ако $\angle BAC = 70^\circ$, $\angle BAD = 40^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ и $\angle CBD = 41^\circ$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Во $\triangle ABC$, $\overline{BC} = 2\sqrt{6}$, $\angle ABC = 30^\circ$ и $\angle BCA = 45^\circ$. Одреди ја должината на симетралата на $\angle ABC$.

2. Во $\triangle ABC$ за должините на страните важи $a - b = 5\text{cm}$, $c = 7\text{cm}$ и $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}\text{cm}$. Одреди ја должината на страната a .

3. Должината на тежишната линија повлечена од темето A во $\triangle ABC$ изнесува $t_a = 15\text{cm}$. Одреди ја должината на страната b , ако $a = 16\text{cm}$, $c = 11\text{cm}$.

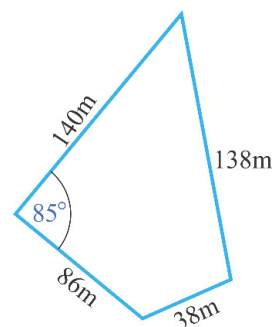
4. Должините на страните на еден паралелограм се 11cm и 6cm , а еден агол на паралелограмот е еднаков на 112° . Колку изнесува должината на покусата дијагонала на паралелограмот?

5. Одреди ја должината на симетралата на аголот на основата кај рамнокрак триаголник со должина на кракот 15cm и агол спроти основата од 30° .

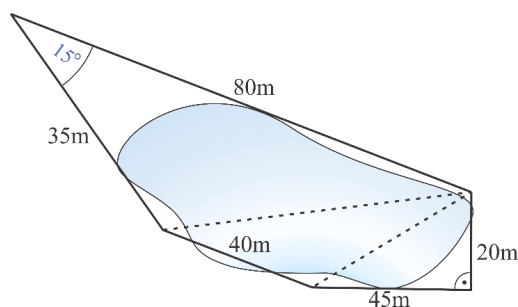
6. Одреди ја должината на дијагоналата BD на траpezот $ABCD$ ако страните на траpezот се $\overline{AB} = 11\text{cm}$, $\overline{BC} = 4\text{cm}$, $\overline{CD} = 5\text{cm}$, $\overline{DA} = 4,5\text{cm}$.

7. Одреди ја должината на страната a во $\triangle ABC$, ако $b = 5$, $c = 7$ и $\alpha = 60^\circ$.

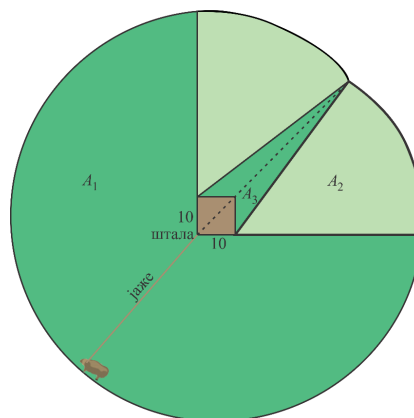
8. Одреди ја плоштината на градежното земјиште дадено на скицата:



9. Пресметај ја приближно плоштината на езерото, како збир од плоштините на добиените триаголници. Искористи ги податоците од скицата:



10. Крива е врзана на јаже со должина од 100m . Шталата има квадратен облик со страна 10m . Одреди ја плоштината на делот од пасиштето прикажан на цртежот, ако кравата е врзана за едниот агол од шталата.



7. ВЕКТОРИ ВО ПРОСТОР

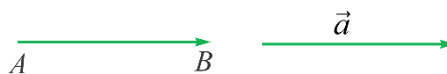
7.1. Поим за вектор во простор

Во математика, во физиката и во другите природни науки се среќаваме се величини кои се напълно определени со својот мерен број, при избрана единица мера. Такви се величините: должина на отсечка, плоштина на геометриска фигура, маса на физичко тело, температура, време итн. Овие величини се викаат **скаларни величини** или накусо, **скалари**.

Покрај скаларните величини среќаваме и такви величини кои не се напълно определени само со својот мерен број. Такви се на пример, величините: сила, брзина, забрзување, јачина на магнетно поле и други. За нивно определување покрај мерниот број треба да ги знаеме и нивниот правец и насока. Овие величини е установено да се викаат **векторски величини** или накусо, **вектори**.

Со скаларните величини, бидејќи тие се напълно определени само со реалните броеви, ќе сметаме како со реални броеви. Меѓутоа, операциите со векторските величини ќе ги дефинираме посебно. Операциите над векторските величини ќе имаат аналогни својства со својствата на соодветните операции над реалните броеви.

Вектор е насочена отсечка, поточно отсечка чија една крајна точка се смета за почеток на векторот, а другата за крај на векторот. Вектор со почеток во точка A и крај во точка B се означува со $\overrightarrow{AB}$ (цртеж 1) и се нарекува **врзан вектор** (за точката A). Векторите ги означуваме и со малите латинични букви со стрелка: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$



Цртеж 1

Секој вектор се карактеризира со должина, правец и насока. **Должина** или **модул** на векторот $\overrightarrow{AB}$ е должината на отсечката AB , и запишуваме $|\overrightarrow{AB}| = AB$, **правец на векторот** е определен со правата на која лежи векторот, додека **насока на векторот** е ориентацијата од почетната кон крајната точка.

Ако точките A и B се совпаѓаат, тогаш векторот $\overrightarrow{AB}$ го нарекуваме **нулти вектор**, и запишуваме $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Очигледно, нултиот вектор има должина нула, односно $|\vec{0}| = 0$.

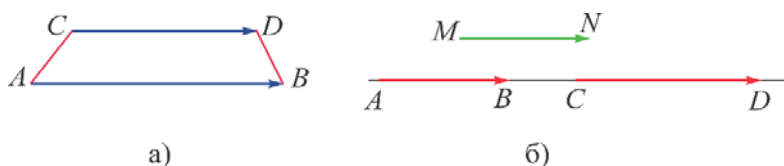
За ненултите вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ велиме дека се **колинеарни** ако правите AB и CD се паралелни или совпаднати. За нултиот вектор ќе сметаме дека е колинеарен со секој вектор.

Пример 1. Да докажеме дека точките A , B и C се колинеарни ако и само ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни.

Ако точките A , B и C се колинеарни, тогаш тие лежат на некоја права p , па векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ лежат на правата p , односно тие се колинеарни.

Обратно, ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни, тогаш правите AB и AC се паралелни. Но, тие имаат заедничка точка A , што значи тие се совпаѓаат, од каде што следува дека точките A , B и C се колинеарни.

За два колинеарни вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коишто не лежат на иста права, велиме дека **имаат иста насока**, ако отесечките AC и BD не се сечат (цртеж 2а)). Ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на иста права и ако постои вектор $\overrightarrow{MN}$ кој има иста насока со $\overrightarrow{AB}$ и со $\overrightarrow{CD}$, тогаш за векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ велиме дека имаат иста насока (цртеж 2б)). За два колинеарни вектори, коишто немаат иста насока, велиме дека **имаат спротивни насоки**.



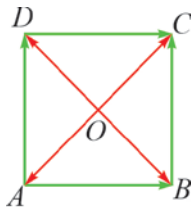
Цртеж 2

За два вектори велиме дека се **еднакви**, ако тие се колинеарни, имаат иста насока и имаат иста должина (интензитет).

Ако $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, тогаш векторот $\overrightarrow{BA}$ се нарекува **спротивен** на $\vec{a}$ и се означува со $-\vec{a}$.

Нека $\vec{a}$ е произволен вектор и P е произволна точка во просторот. Според дефиницијата за еднаквост на вектори постои единствен врзан вектор $\overrightarrow{PQ}$ еднаков на векторот $\vec{a}$. Со други зборови, за секој вектор почетната точка може да се избере произволно, па затоа векторите ги разгледуваме со точност до нивната положба. Значи можеме да сметаме дека векторот се „поместува“ (транслаторно) во просторот без да ја менува својата големина, правец и насока. Во таа смисла под вектор ќе подразбираме **слободен вектор**, ако поинаку не е нагласено.

Пример 2. Во квадрат $ABCD$ со центар во точката O (цртеж 3) се претставени векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD}$.



Цртеж 3

Меѓу себе еднакви се следниве парови вектори $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Задачи

1. Нека O , A и B се три различни точки. Ако точката O е средина на отсечката AB , тогаш $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BO}$. Докажи!

2. Нека ABC е даден триаголник и нека M , N и P се средини на страни-

те AB , BC и CA , соодветно. Точно ли е дека:

- а) $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP}$; б) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MB}$; в) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{NB}$;
 г) $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$; д) $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BN}$?

3. Нека е даден правоаголник $ABCD$ чиешто дијагонали се сечат во точката O и нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{c}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{d}$. Кои од следните искази се точни:

- а) $\overrightarrow{CB} = \vec{c}$; б) $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$; в) $\overrightarrow{OD} = \vec{b}$; г) $\overrightarrow{CD} = \vec{a}$;
 д) $\overrightarrow{DC} = \vec{a}$; ф) $\overrightarrow{AO} = \vec{d}$; е) $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$?

4. Нека е даден квадрат $ABCD$ чиешто дијагонали се сечат во точката O . Кои од векторите: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$, $\overrightarrow{AO} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BO} = \vec{n}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DO} = \vec{q}$ се меѓу себе еднакви?

7.2. Собирање на вектори

Во множеството слободни вектори ќе дефинираме операција собирање на вектори со својства аналогни на својствата на операцијата собирање на реални броеви.

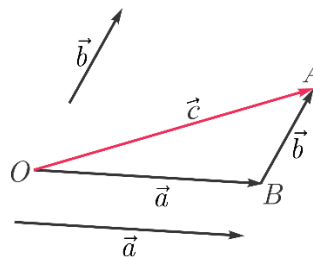
Собирање на вектори

Нека O , A и B се три произволни точки во просторот. Врзаниот вектор $\overrightarrow{OB}$ се нарекува збир на врзаните вектори $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$ и пишуваме $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (цртеж 1). За да го определиме нивниот збир, постапуваме на следниов начин:

- Избираме произволна точка O во просторот.
- Го конструираме векторот $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.
- Земајќи ја точката A како почетна, го конструираме векторот $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Векторот $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ се нарекува **збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, наречени **собиращи**, и запишуваме $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



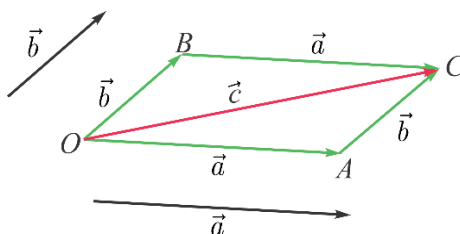
Цртеж 1

Гореизложената постапка за собирање на два вектори се вика **правило на триаголник**. Во продолжение ќе го проучиме **правилото на паралелограм** за собирање на два вектори.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. За да го определиме нивниот збир постапуваме на следниов начин:

- Избираме произволна точка O во просторот.
- Ги конструираме векторите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.
- Низ точката A конструираме права паралелна со правата OB , а низ точката B конструираме права паралелна со правата OA . Пресечната точка на добиените прави ја означуваме со C (цртеж 2).

Векторот $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ се нарекува **збир** на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

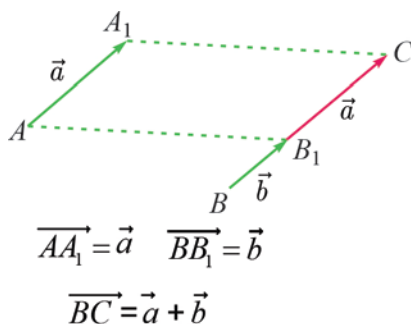


Цртеж 2

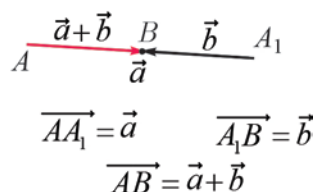
Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни, тогаш можни се следниве два случаја:

- а)** Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат иста насока (цртеж 3а). Тогаш збирот $\vec{a} + \vec{b}$ има правец и насока како векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а за модулот важи равенството

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$



а)



б)

Цртеж 3

- б)** Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имаат спротивни насоки (цртеж 3б). Тогаш збирот $\vec{a} + \vec{b}$ има правец како и векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, насока на векторот со поголем модул, а за модулот важи равенството

$$|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||.$$

Својства на операцијата собирање на вектори

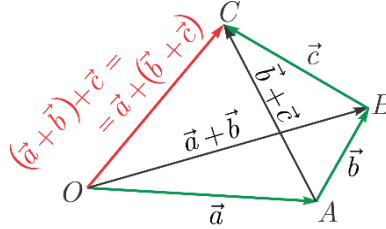
Да го означиме со V множеството слободни вектори. Ќе предочиме некои својства на операцијата собирање на вектори кои произлегуваат од самата дефиниција.

- 1.** За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $\vec{a} + \vec{b} \in V$.

Својството следува непосредно од дефиницијата на операцијата собирање на вектори и го искажува фактот дека збир од два вектори е вектор.

2. За секои три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Својството го искажува фактот дека операцијата собирање на вектори е асоцијативна. Навистина, ако $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$ и $\vec{BC} = \vec{c}$, тогаш од правилото на триаголник, имаме (цртеж 4).



Цртеж 4

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}, \text{ и}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}.$$

3. За секој вектор $\vec{a} \in V$ и за нултиот вектор $\vec{0}$ важи $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

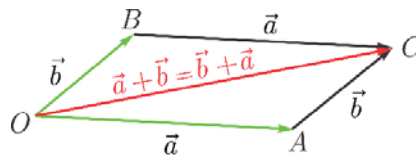
Навистина, ако $\vec{AB} = \vec{a}$, тогаш тврдењето следува од равенствата

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB} = \vec{a} \text{ и } \vec{0} + \vec{a} = \vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB} = \vec{a}.$$

4. За секој вектор $\vec{a} \in V$ важи $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

Својството предочува дека кој било вектор $\vec{a}$ собран со нему спротивниот вектор $-\vec{a}$ го дава нултиот вектор.

5. За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



Цртеж 5

Својството го искажува фактот дека операцијата собирање на вектори е комутативна (цртеж 5). Навистина, ако $\vec{OA}, \vec{BC} = \vec{a}$ и $\vec{OB}, \vec{AC} = \vec{b}$, тогаш

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} \text{ и } \vec{b} + \vec{a} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}.$$

Асоцијативноста и комутативноста на операцијата собирање на вектори дозволуваат при собирањето на вектори:

- назначените операции да ги изведуваме по произволен редослед,
- повеќе вектори да се заменат со својот збир или еден вектор да се замени со неговиот збир.

Пример 1. За секои $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{c} + (\vec{b} + \vec{a})$.

Навистина, од асоцијативноста и од комутативноста на операцијата собирање на вектори, имаме $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} + (\vec{b} + \vec{a})$.

Со повеќекратна примена на правилото на триаголник може да се најде векторот-збир на секој конечен број вектори.

Пример 2. За да го најдеме збирот на векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ и $\vec{a}_5$, прво ги собираме векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Нека O е произволна точка и нека $\vec{OA}_1 = \vec{a}_1$ и $\vec{A_1A_2} = \vec{a}_2$ (цртеж 6). Тогаш имаме дека $\vec{OA_2} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$.

Ако од крајната точка A_2 на векторот $\vec{OA_2}$ го нанесеме векторот $\vec{A_2A_3} = \vec{a}_3$ добиваме

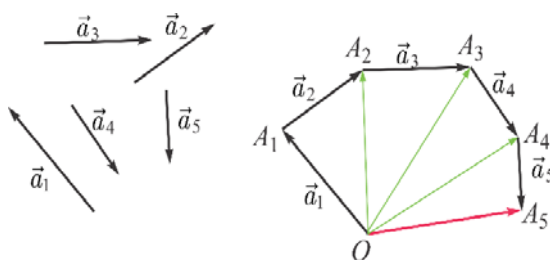
$$\vec{OA_3} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3.$$

Понатаму, ако од точката A_3 го нанесеме векторот $\vec{A_3A_4} = \vec{a}_4$ имаме

$$\vec{OA_4} = ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3) + \vec{a}_4.$$

На крај го конструираме векторот $\vec{A_4A_5} = \vec{a}_5$ и го добиваме збирот

$$\vec{OA_5} = (((\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3) + \vec{a}_4) + \vec{a}_5.$$



Цртеж 6

Задачи

1. Нека $ABCDEF$ е правоаголник со центар во точката O . Најди го збирот на векторите $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ и $\vec{OD}$.

2. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека S е пресекот на неговите дијагонали. Упрости ги изразите:

а) $(\vec{BC} + \vec{SA}) + \vec{SC}$;

б) $(\vec{AB} + \vec{DS}) + \vec{SA}$;

в) $\vec{DS} + (\vec{SA} + \vec{BC})$;

г) $(\vec{DS} + \vec{BC}) + (\vec{SA} + \vec{AB})$.

3. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Изрази ги векторите $\vec{BC}, \vec{CD}, \vec{ED}$ и $\vec{FE}$ преку векторите $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AF}$.

4. Дадени се два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструирај ги векторите:

а) $\vec{a} + \vec{b}$;

б) $(-\vec{a}) + \vec{b}$;

в) $(-\vec{b}) + \vec{a}$;

г) $(-\vec{a}) + (-\vec{b})$;

д) $-(\vec{a} + \vec{b})$.

5. Нека се дадени два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни. Конструирај го векторот $\vec{c}$, така што $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{0}$.

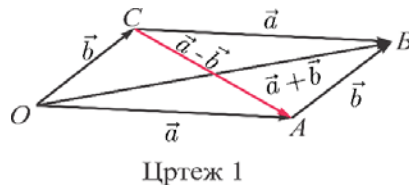
6. Нека $ABCD$ е правоаголник. Ако $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, конструирај ги векторите

- а) $\vec{a} + (-\vec{c})$; б) $\vec{a} + (-\vec{b})$; в) $\vec{b} + (-\vec{a})$; г) $\vec{c} + (-\vec{b})$.

7.3. Одземање на вектори

Во множеството на вектори ќе воведеме нова операција која е инверзна на операцијата собирање на вектори. Аналогно, како кај реалните броеви, инверзната операција на операцијата собирање, ќе ја викаме **одземање**.

Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (цртеж 1). **Разлика** на векторот $\vec{a}$ со векторот $\vec{b}$ се нарекува векторот $\vec{c}$ така што $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, и се пишува $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



Цртеж 1

Векторот $\vec{a}$ е **намаленик**, а векторот $\vec{b}$ е **намалител**.

Од паралелограмот $OACB$ на цртеж 1 може да се определи и збирот $\vec{a} + \vec{b}$ и разликата $\vec{a} - \vec{b}$ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Навистина, од $\vec{b} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$ добиваме дека

$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CA}.$$

Операцијата одземање на вектори ќе ја доведеме во врска со операцијата собирање. Имено, поради асоцијативноста и комутативноста на операцијата собирање, имаме

$$\vec{b} + (\vec{a} + (-\vec{b})) = \vec{b} + ((-\vec{b}) + \vec{a}) = (\vec{b} + (-\vec{b})) + \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

од каде што следува дека

$$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

Според тоа, разликата на вектор $\vec{a}$ со вектор $\vec{b}$ е еднаква на збирот на векторот $\vec{a}$ со векторот $-\vec{b}$ (спротивниот вектор на векторот $\vec{b}$).

Од погорната дискусија следува дека во една векторска равенка може одредени членови од равенката да ги префрламе од едната на другата страна, без да се наруши равенството, исто како кај равенките со реални броеви.

Пример 1. Од векторската равенка $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ги добиваме еквивалентните равенки $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ и $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$.

Пример 2. Даден е правилен шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Изрази ги векторите $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$, $\overrightarrow{A_4A_5}$ и $\overrightarrow{A_5A_6}$ преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{A_6A_1}$.

Непосредно заклучуваме дека

$$\overrightarrow{A_4A_5} = -\overrightarrow{A_1A_2} = -\vec{a} \text{ и } \overrightarrow{A_3A_4} = -\overrightarrow{A_6A_1} = -\vec{b}.$$

Бидејќи $\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{A_6A_1} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$, од триаголникот OA_2A_3 имаме дека $\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{OA_3}$ (правило на триаголник), односно $\vec{b} + \overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a}$. Оттука добиваме дека

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{a} - \vec{b}.$$

На сличен начин од триаголникот OA_5A_6 следува дека

$$\overrightarrow{A_5A_6} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Задачи

1. Нека се дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Конструирај ги векторите:

- а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $\vec{b} - \vec{a}$; г) $-\vec{a} - \vec{b}$.

2. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се заемно нормални вектори и $|\vec{a}| = 6$ и $|\vec{b}| = 8$, пресметај ги $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3. Реши ги векторските равенки:

- а) $\vec{a} + \vec{x} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$; б) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$.

4. Нека $ABCD$ е даден паралелограм и нека S е пресекот на неговите дијагонали. Изрази ги векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$.

7.4. Множење на вектор со скалар

Елементите на множеството реални броеви вообичаено се нарекуваат скалари. Во множеството вектори ќе дефинираме операција наречена множење на вектор со скалар.

Нека $\vec{a}$ е даден вектор и p даден скалар.

Производ на векторот $\vec{a}$ со скаларот p се нарекува векторот $\vec{b} = p\vec{a}$ кој е колинеарен со векторот $\vec{a}$, има должина $|p||\vec{a}|$, иста насока како векторот $\vec{a}$, ако $p > 0$, а спротивна насока ако $p < 0$. Ако $p = 0$ или $\vec{a} = \vec{0}$, тогаш $p\vec{a} = \vec{0}$.

Количник на векторот $\vec{a}$ со ненулти скалар p се нарекува векторот $\frac{1}{p}\vec{a}$, се пишува $\frac{\vec{a}}{p}$.

Непосредно од горните дефиниции следува дека за секој вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ векторот $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ е единичен вектор со ист правец и насока како и векторот $\vec{a}$.

Според тоа, имаме дека $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$.

Ќе наведеме некои својства на операцијата множење на вектор со скалар.

1. За секој реален број p и секој $\vec{a} \in V$ важи $p\vec{a} \in V$.

Својството следува непосредно од дефиницијата на операцијата множење на вектор со скалар.

2. За секој $\vec{a} \in V$ и реалниот број 1 важи $1\vec{a} = \vec{a}$.

Својството следува непосредно од дефиницијата на операцијата множење на вектор со скалар.

3. За секои реални броеви p и q и секој $\vec{a} \in V$ важи

$$p(q\vec{a}) = (pq)\vec{a} = q(p\vec{a}).$$

Погорното својство предочува дека вектор се множи со производ од скалари кога ќе се помножи со еден од скаларите, а потоа со другиот.

4. За секои реални броеви p и q и секој $\vec{a} \in V$ важи

$$(p+q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}.$$

Погорното својство укажува дека вектор се множи со збир од скалари кога ќе се помножи со секој од скаларите, а потоа добиените вектори ќе се соберат.

5. За секој реален број p и секои $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи $p(\vec{a} + \vec{b}) = p\vec{a} + p\vec{b}$.

Според погорното својство збир од два вектори се множи со скалар кога ќе се помножи секој вектор со скаларот, а потоа добиените вектори ќе се соберат.

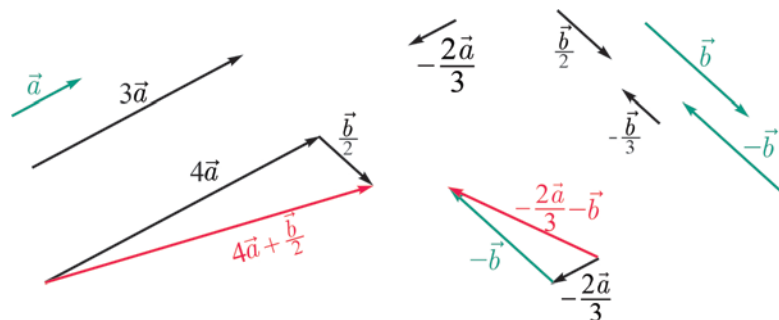
Пример 1. Збирот на два скалара се множи со збирот на два вектори како што се множи бином со бином

$$\begin{aligned} (p+q)(\vec{a} + \vec{b}) &= p(\vec{a} + \vec{b}) + q(\vec{a} + \vec{b}) = \quad (\text{својство 4}) \\ &= p\vec{a} + p\vec{b} + q\vec{a} + q\vec{b}. \quad (\text{својство 5}). \end{aligned}$$

Пример 2. За да се конструираат векторите:

а) $3\vec{a}$; б) $-\frac{\vec{b}}{3}$; в) $4\vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$; г) $\frac{-2\vec{a}}{3} - \vec{b}$.

Според дефиницијата за множење на вектор со скалар, векторите $3\vec{a}$, $4\vec{a}$ и $-\frac{2\vec{a}}{3}$ се колинеарни со векторот $\vec{a}$, додека векторите $\frac{\vec{b}}{2}$, $-\frac{\vec{b}}{3}$ и $-\vec{b}$ се колинеарни со векторот $\vec{b}$ (цртеж 1).



Цртеж 1

Пример 3. Нека е даден триаголник ABC . Ако точките A_1 , B_1 и C_1 се средини на страните BC , CA и AB , соодветно, тогаш $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

Од равенствата

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

добиваме дека

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}{2} = \overrightarrow{AA} + \frac{\overrightarrow{BB}}{2} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Задачи

1. Избери произволен вектор $\vec{a}$ и конструирај ги векторите:

а) $4\vec{a}$; б) $-5\vec{a}$; в) $\frac{2\vec{a}}{3}$; г) $-\sqrt{2}\vec{a}$; д) $\sqrt{3}\vec{a}$.

2. Избери два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ кои не се колинеарни и конструирај ги векторите:

а) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; б) $4\vec{a} - \frac{\vec{b}}{3}$; в) $-\frac{\vec{a}}{2} + 2\vec{b}$; г) $\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b}$.

3. Избери четири вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и конструирај ги векторите:

а) $\vec{a} - 4\vec{b} + (2\vec{c} - 3\vec{d})$; б) $4\vec{a} + 3(2\vec{b} - 5\vec{c})$; в) $\vec{b} - (\vec{a} + 3\vec{d}) - 2\vec{c}$.

4. Упрости ги изразите:

а) $2(\vec{a} - \vec{b}) + 4(3\vec{a} - \vec{b}) + 5(\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $3(\vec{a} + 4\vec{b} + 7\vec{c}) + 3\vec{b} + 3(2\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c})$.

5. Реши ја векторската равенка по непознатиот вектор $\vec{x}$:

а) $4\vec{x} - 2\vec{a} + 6\vec{b} = 2(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{x}$; б) $3(\vec{a} + \vec{x}) - 4\vec{b} + 2\vec{a} - 3\vec{x} = 5(\vec{a} - \vec{b} + \vec{x})$.

6. Нека точките A , B , C и D се произволни точки и нека M и N се средини на отсечките AB и CD , соодветно. Докажи дека

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

7.5. Делење на колинеарни вектори

Количник на два колинеарни вектори е количникот на нивните модули, земен со позитивина знак, ако векторите имаат иста насока, и со негативен знак ако векторите имаат спротивни насоки. Попрецизно, ако векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq \vec{0}$) се колинеарни, тогаш нивниот **количник** се дефинира како

$$\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}, \quad \text{при иста насока на } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2, \text{ и}$$

$$\frac{\vec{a}_1}{\vec{a}_2} = -\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|}, \quad \text{при спротивни насоки на } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2.$$

Непосредно од дефиницијата следува дека ако векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq \vec{0}$)

се колинеарни, тогаш

$$\vec{a}_1 = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \vec{a}_2, \text{ при иста насока на } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2, \text{ и}$$

$$\vec{a}_1 = -\frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} \vec{a}_2, \text{ при спротивни насоки на } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2.$$

Со други зборови, ако векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ ($\vec{a}_2 \neq \vec{0}$) се колинеарни, тогаш постои скалар p така што

$$\vec{a}_1 = p\vec{a}_2.$$

Погорната дискусија овозможува анализа на множеството решенија на равенката

$$p\vec{a} + q\vec{b} = \vec{0}$$

каде што $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се дадени вектори, а p и q се произволни скалари.

Забележуваме дека равенство секогаш е можно, бидејќи за $p = 0$ и $q = 0$ имаме $0\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. Значи, парот скалари $(0, 0)$ е тривијално решение на равенката за секој избор на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Се поставува прашањето дали постојат скалари p и q од кои што барем еден е различен од нула така што векторот $p\vec{a} + q\vec{b}$ да биде еднаков на нултиот вектор. Одговорот секако зависи од изборот на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

- Ако $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, секој подреден пар $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ ја задоволува равенката, па значи $\mathbb{R}^2$ е множеството решенија на равенката.

- Ако $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ имаме дека $\{(p, 0) | p \in \mathbb{R}\}$ е множеството решенија на равенката.

- Ако векторите $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ се колинеарни, тогаш $\vec{a} = k\vec{b}$, за некој скалар k . Во тој случај равенката е еквивалентна со равенката $(kp + q)\vec{b} = \vec{0}$. Множеството решенија $\{(p, -kp) | p \in \mathbb{R}\}$ се добива од скаларното равенство $kp + q = 0$, кое мора да биде исполнето за да биде векторот $(kp + q)\vec{b}$ еднаков на нултиот вектор, согласно претпоставката $\vec{b} \neq \vec{0}$.

- Ако векторите $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ не се колинеарни, тривијалното решение $(0, 0)$ е единственото решение на равенката. Претпоставката за постоење на не-тривијално решение (p, q) во кое без губење на општоста, на пример, $p \neq 0$ повлекува точност на равенката $\vec{a} + \frac{q}{p}\vec{b} = \vec{0}$ или $\vec{a} = -\frac{q}{p}\vec{b}$ што противречи на претпоставката дека векторите не се колинеарни.

Пример 1. Докажи дека пресечната точка на дијагоналите во секој паралелограм е нивна средина.

Нека $ABCD$ е паралелограм и нека S е пресечната точка на неговите дијагонали (цртеж 1).

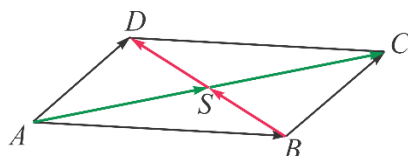
Векторот $\overrightarrow{AS}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, па

$$\overrightarrow{AS} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}), \text{ за некој скалар } \lambda.$$

Слично, векторот $\overrightarrow{BS}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, па имаме

$$\overrightarrow{BS} = \mu(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}), \text{ за некој скалар } \mu.$$

Од $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}$, добиваме дека $(\lambda + \mu - 1)\overrightarrow{AB} + (\lambda - \mu)\overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не се колинеарни, па затоа $\lambda + \mu - 1 = 0$ и $\lambda - \mu = 0$, од каде што следува дека $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.



Цртеж 1

Задачи

1. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. Најди ги скаларите x и y , ако

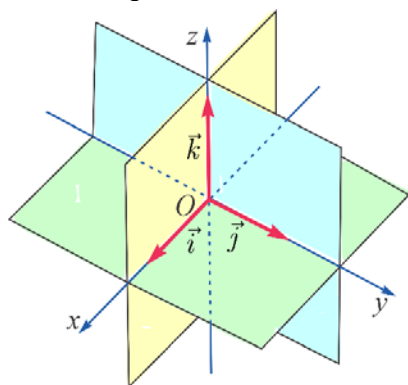
а) $(x + y)\vec{a} + (x - y - 6)\vec{b} = \vec{0}$; б) $(3x + y)(\vec{a} + \vec{b}) = (x - 1)\vec{a} - (x + y - 5)\vec{b}$.

2. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни. За која вредност на параметарот p векторите $\vec{c} = (p - 1)\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = (2 + 3p)\vec{a} - 2\vec{b}$ се колинеарни?

3. Нека $ABCD$ е правоаголник и нека N е средина на страната AB , а M е средина на страната AD . Изрази го векторот $\overrightarrow{AT}$ преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, ако T е пресечна точка на правите MB и ND .

7.6. Координати на вектор

Досега векторите ги задававме графички со помош на насочени отсечки. Воведувањето на координатниот начин на задавање на векторите е основа за користење на алгебарски пристап во решавањето на геометриски задачи.



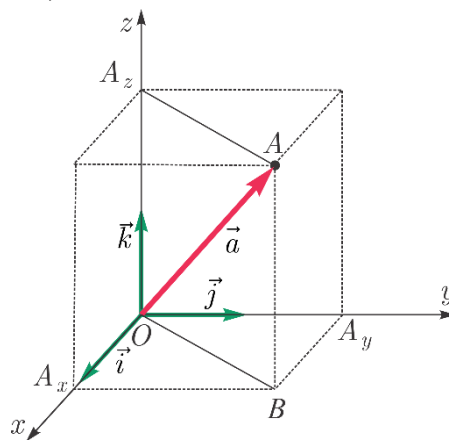
Цртеж 1

Нека во просторот се дадени три заемно нормални вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, такви што $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$, и фиксирана точка O . Ги конструираме векторите $\overrightarrow{OX}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OY}=\vec{j}$ и $\overrightarrow{OZ}=\vec{k}$. На секоја од правите OX , OY и OZ ја избираме за позитивна насока насоката на векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, соодветно (цртеж 1). Добиените прави ги викаме **координатни оски**, првата се вика x -оска или апсциса, втората y -оска или ордината, а третата z -оска или апликата. Трите рамнини определени со паровите оски xy , yz и xz се нарекуваат **координатни рамнини**.

На трите бројни оски за единица мера за должина ја избираме должината на координатните вектори. Од тие причини координатните вектори ги викаме уште и **единични вектори**.

Со изборот на точката O и векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ сме избрале **правоаголен Декартов координатен систем**, кој ќе го означуваме со $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Точката O се вика **координатен почеток**, а векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ **координатни вектори**.

Нека $\vec{a}$ е произволен вектор во просторот и нека $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ (цртеж 2). Низ точката A повлекуваме права паралелна на z -оската, и со B го означуваме пресекот на оваа права со xy -рамнината. Низ точката B повлекуваме прави паралелни на оските x -оската и y -оската, и нивните пресечни точки со y -оската и x -оската ги означуваме со A_y и A_x , соодветно. На крајот, низ точката A повлекуваме права паралелна со правата OB и нејзиниот пресек со z -оската го означуваме со A_z (цртеж 2).



Цртеж 2

Од дефиницијата на собирање вектори имаме

$$\vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA_z} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y}$$

од каде што следува дека

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}.$$

Бидејќи векторите $\overrightarrow{OA_x}$ и $\vec{i}$ се колинеарни, постои реален број a_x таков што $\overrightarrow{OA_x} = a_x \vec{i}$. Слично, постојат реални броеви a_y и a_z такви што $\overrightarrow{OA_y} = a_y \vec{j}$ и $\overrightarrow{OA_z} = a_z \vec{k}$. Така, го добиваме разложувањето

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

на векторот $\vec{a}$ преку координатните вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$.

Коефициентите во разложувањето на даден вектор $\vec{a}$ се нарекуваат **координати** на векторот во однос на координатниот систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Записот

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

е **координатно претставување** на векторот $\vec{a}$. Притоа a_x се нарекува **прва координата**, a_y **втора координата**, а a_z се нарекува **трета координата** на векторот $\vec{a}$.

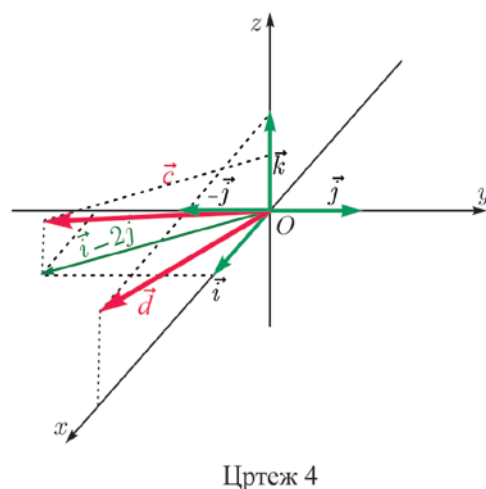
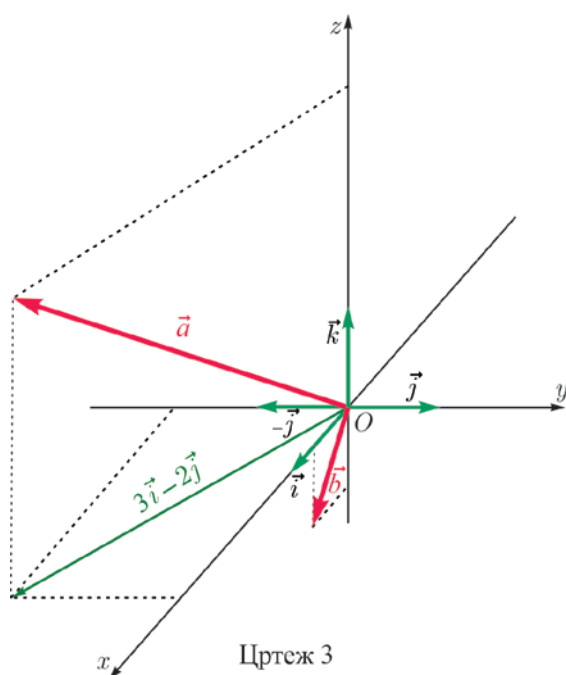
Координатните претставувања на единечните вектори се

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0) \text{ и } \vec{k} = (0, 0, 1)$$

додека за нултиот вектор важи $\vec{0} = (0, 0, 0)$.

Пример 1. Векторот $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ има координати $a_x = 3$, $a_y = -2$ и $a_z = 5$, а векторот $\vec{b} = \frac{\vec{i}}{2} - \frac{3\vec{k}}{4}$ има координати $b_x = \frac{1}{2}$, $b_y = 0$ и $b_z = -\frac{3}{4}$.

Подредената тројката $(3, -2, 5)$ е координатното претставување на векторот $\vec{a}$, додека $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4})$ е координатното претставување на векторот $\vec{b}$. (цртеж 3)



Подредените тројки $\left(1, -2, \frac{3}{2}\right)$ и $(-3, 0, 1)$ се координатни претставувања на векторите $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$ и $\vec{d} = -3\vec{i} + \vec{k}$, соодветно. На цртеж 4 векторите $\vec{c}$ и $\vec{d}$ се претставени геометриски во координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Задачи

1. Запиши ги координатните претставувања на векторите:

а) $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$; б) $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$; в) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$; г) $\vec{a} = \vec{j} + 6\vec{k}$.

2. Разложи ги векторите

а) $\vec{a} = (7, -3, 5)$ б) $\vec{a} = (4, -2, 0)$ в) $\vec{a} = (-1, 0, 5)$ г) $\vec{a} = (0, 1, 0)$

по координатните вектори.

3. Во координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ конструирај ги векторите:

а) $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ б) $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ в) $\vec{a} = \vec{j} + 2\vec{k}$ г) $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{k}$.

4. Конструирај ги векторите:

а) $\vec{a} = (2, 4, 1)$; б) $\vec{a} = \left(3, -2, -\frac{1}{3}\right)$; в) $\vec{a} = (-4, 3, 0)$; г) $\vec{a} = (0, 1, -5)$.

7.7. Операции со вектори во координатен облик

Нека се дадени векторите $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогаш од

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

добиваме дека

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \pm (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}$$

односно

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z).$$

Според тоа, секоја координата на збирот од два вектори е еднаква на збирот на соодветните координати на векторите, додека секоја координата на разликата на еден вектор со друг е еднаква на разликата на соодветните координати на векторите.

Пример 1. Ако $\vec{a} = (1, 4, -2)$ и $\vec{b} = (-1, 3, 0)$, тогаш координатните претставувања на збирот $\vec{a} + \vec{b}$ и разликата $\vec{a} - \vec{b}$ се, соодветно,

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 4, -2) + (-1, 3, 0) = (1 + (-1), 4 + 3, -2 + 0) = (0, 7, -2),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1, 4, -2) - (-1, 3, 0) = (1 - (-1), 4 - 3, -2 - 0) = (2, 1, -2).$$

Нека е даден векторот $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и нека λ е произволен скалар. Тогаш од разложувањето $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ наоѓаме дека

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$$

односно

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Значи, секоја координата на производот на еден вектор со скалар е еднаква на производот на соодветната координата на векторот со дадениот скалар.

Пример 2. Ако $\vec{a} = (2, -1, 0)$, тогаш координатните претставувања на векторите $3\vec{a}$, $-2\vec{a}$ и $\frac{1}{3}\vec{a}$ се, соодветно

$$3\vec{a} = 3(2, -1, 0) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-1), 3 \cdot 0) = (6, -3, 0)$$

$$-2\vec{a} = -2(2, -1, 0) = (-2 \cdot 2, (-2) \cdot (-1), (-2) \cdot 0) = (-4, 2, 0)$$

$$\frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}(2, -1, 0) = \left(\frac{1}{3} \cdot 2, \frac{1}{3} \cdot (-1), \frac{1}{3} \cdot 0\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right).$$

Добиените заклучоци за собирање на два вектори и множење на вектор со скалар, кога векторите се зададени со своите координати може да се обопшти на конечно многу вектори.

Ако $\vec{a}_1 = (p_1, q_1, r_1)$, $\vec{a}_2 = (p_2, q_2, r_2)$, ..., $\vec{a}_k = (p_k, q_k, r_k)$ се дадени вектори и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ се дадени скалари, тогаш векторот $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$ има координати

$$(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k, \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \dots + \lambda_k q_k, \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_k r_k).$$

Пример 3. Ако $\vec{a}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{a}_2 = (0, 3, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, -2)$ и $\vec{a}_4 = (-2, 0, 0)$, тогаш координатите на векторите $2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$ и $2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - 3\vec{a}_4$, соодветно се

$$2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3 = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 4 \cdot 0, 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-2)) = (2, 9, 6)$$

$$2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - 3\vec{a}_4 = (8, 3, 0).$$

Задачи

1. Најди ги координатите на збирот на векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, ако:

а) $\vec{a}_1 = (3, 1, -1)$ и $\vec{a}_2 = (2, -5, 1)$; **б)** $\vec{a}_1 = (-1, -3, 7)$ и $\vec{a}_2 = (4, 9, -2)$.

2. Запиши ги координатите на разликата на векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, ако:

а) $\vec{a}_1 = (-4, 1, 7)$ и $\vec{a}_2 = (2, -5, -3)$; **б)** $\vec{a}_1 = (6, -1, 0)$ и $\vec{a}_2 = (4, -5, 3)$.

3. Дадени се векторите $\vec{a}_1 = (0, -3, 2)$ и $\vec{a}_2 = (1, -3, -1)$. Најди ги координатите на векторите:

а) $2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2$;

б) $-3\vec{a}_1 + \vec{a}_2$;

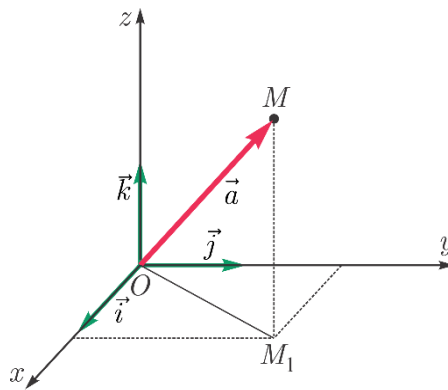
в) $4\vec{a}_1 - \vec{a}_2$.

4. За векторите $\vec{a}_1 = (0, 0, -4)$, $\vec{a}_2 = (3, -4, -3)$, $\vec{a}_3 = (-1, 3, 0)$ и $\vec{a}_4 = (0, -2, 1)$, запиши ги координатите на векторите:

- а) $2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + 3\vec{a}_3$; б) $\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_4$; в) $4\vec{a}_1 + \vec{a}_2 - 3\vec{a}_3 - \vec{a}_4$.

7.8. Делење на отсечка во даден однос

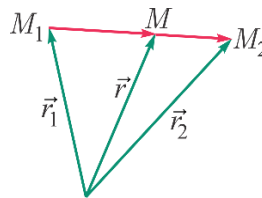
Нека во просторот е избран правоаголен Декартов координатен систем $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ и нека M е произволна точка. Векторот $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ со почеток во координатниот почеток и крај во точката M се нарекува **радиусвектор** на точката M (цртеж 1).



Цртеж 1

Положбата на точката M во просторот е напълно определена со нејзиниот радиусвектор $\vec{r}$, а тој пак е напълно определен со своите координати во однос на избраниот координатен систем. Точката M како крајна точка на векторот $\vec{r}$ ќе биде определена со истите координати. Според тоа, ако $\vec{r} = (x, y, z)$, тогаш координатите x , y и z на векторот $\vec{r}$ ги викаме **координати** на точката M , и запишуваме $M(x, y, z)$.

Нека е дадена отсечката M_1M_2 чиито крајни точки имаат координати $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, и нека точката M ја дели отсечката M_1M_2 во однос q , односно $M_1M : MM_2 = m : n$ (цртеж 2).



Цртеж 2

Да ги означиме со $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ радиусвекторите на точките M_1 и M_2 , а со $\vec{r}$ радиусвекторот на точката M . Да забележиме дека

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \vec{r} - \vec{r}_1 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = \vec{r}_2 - \vec{r}.$$

Бидејќи векторите $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ се колинеарни важи $\overrightarrow{M_1M} : \overrightarrow{MM_2} = m : n$ од каде што добиваме дека $\vec{r} - \vec{r}_1 = \frac{m}{n}(\vec{r}_2 - \vec{r})$. Според тоа, радиусвекторот на точката M е определен со формулата

$$\vec{r} = \frac{n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{m+n},$$

односно

$$\vec{r} = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n} \right).$$

Оттука добиваме дека

$$M \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n} \right).$$

Ако точката M е средина на отсечката M_1M_2 тогаш $q=1$ и радиусвекторот на точката M е определен со релацијата

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}.$$

За координатите на средишната точка M на отсечката M_1M_2 имаме

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Пример 1. Координатите на точката P која што ја дели отсечката AB во однос $1:2$, ако $A(3, -2, 1)$ и $B(0, 2, -5)$ се

$$P \left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{1+2}, \frac{2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2}{1+2}, \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-5)}{1+2} \right) = P(2, -2, 1).$$

Задачи

1. Најди ги координатите на средината $M(x, y, z)$ на отсечката AB , ако

а) $A(0, -2, 1)$ и $B(-2, 4, 1)$

б) $A(-4, 0, 5)$ и $B(6, 0, -7)$.

2. Дадени се точките $A(-1, 8, -2)$ и $M(7, -4, 0)$. Запиши ги координатите на точката B ако M е средина на отсечката AB .

3. Дадени се точките $A(0, 2, 2)$ и $B(6, 2, 4)$. Најди ги координатите на точката M којашто отсечката AB ја дели во однос

а) $2:3$

б) $3:2$

в) $1:3$.

4. Нека $A(-8, 14, -6)$, $B(9, -7, -10)$ и $C(0, -3, 20)$ се темиња на триаголник. Најди ги координатите на средините на неговите страни.

7.9. Скаларен производ на вектори

Поим за скаларен производ на вектори

Покрај операциите собирање, одземање и множење на вектор со скалар, има смисла и **множењето на вектори**. Множењето на два вектори може да се дефинира на два начина во зависност од тоа дали сакаме резултатот од извршената операција да биде скалар или вектор. Според тоа, ќе разликуваме скаларно и векторско множење на два вектори.

Пред да преминеме на воведување на поимот скаларен производ ќе го воведеме поимот за агол меѓу два вектори. Имено, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се два произволни вектори така што $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, тогаш **агол** меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е аголот меѓу полуправите OA и OB и ќе го означуваме со $(\vec{a}, \vec{b})$. Да напомниме дека $0 \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq \pi$.

Дефиниција 1. Скаларен производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарекува бројот еднаков на производот од должините на векторите и косинусот од аголот меѓу нив, и се означува со $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

Значи, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Непосредно од дефиницијата на скаларен производ следува дека

- Ако аголот меѓу векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е остар, тогаш $\cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0$, па скаларниот производ е позитивен број. Слично, ако аголот е тап, тогаш скаларниот производ е негативен број
- Ако векторите се колинеарни, аголот меѓу нив е 0, па $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$. Оттука важи и $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
- За заемно нормалните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, бидејќи $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.
- Ако барем еден од векторите е нултиот, тогаш и скаларниот производ е еднаков на нула.

Пример 1. Скаларниот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за коишто

а) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$, е бројот

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ = 10\sqrt{2}$$

б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$, е бројот

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 6 \cdot \cos 135^\circ = -9\sqrt{2}.$$

Својства на скаларен производ на вектори

Во продолжение ќе наведеме неколку својства на скаларниот производ.

1. За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{комутативност})$$

Погорното својство укажува дека кај скаларното множење на вектори не важен редоследот на векторите кои го сочинуваат производот.

2. За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и за секој реален број p важи

$$p(\vec{a}\vec{b}) = (p\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (p\vec{b}) \quad (\text{асоцијативност})$$

Според искажаното својство, скаларен производ се множи со произволен реален број кога ќе се помножи било кој од векторите со дадениот реален број.

3. За секои три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{и} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{дистрибутивност})$$

Погорното својство укажува дека до истиот вектор доаѓаме, ако два вектори се соберат и потоа скаларно се помножат со трет вектор, или ако секој од собироците се помножи со третиот вектор и потоа да се соберат. Притоа, не е важен е редоследот на множителите.

Пример 2. Со помош на погорните својства за скаларниот производ на векторите $\vec{a} = 3\vec{p} + 4\vec{q}$ и $\vec{b} = 12\vec{p} - 5\vec{q}$, каде што $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 1$ и $(\vec{p}, \vec{q}) = 30^\circ$, имаме $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} + 4\vec{q})(12\vec{p} - 5\vec{q}) = 36|\vec{p}|^2 + 33(\vec{p} \cdot \vec{q}) - 20|\vec{q}|^2 = 556 + 66\sqrt{3}$.

Задачи

1. Пресметај го скаларниот производ:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a}^2$; в) $\vec{b}^2$;

ако $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

2. Пресметај го скаларниот производ:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $\vec{a}^2$; в) $\vec{b}^2$;

ако $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

3. Одреди го знакот на скаларниот производ $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, ако

а) $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$; б) $90^\circ < (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

4. Најди го скаларниот производ на векторите $\vec{u} = \vec{x} - 2\vec{y}$ и $\vec{v} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$, ако $|\vec{x}| = 6$, $|\vec{y}| = 3$ и $(\vec{x}, \vec{y}) = 60^\circ$.

5. Пресметај ја вредноста на изразот

а) $(\vec{p} - \vec{q})(2\vec{p} + \vec{q})$; б) $\vec{p} \cdot (\vec{p} - 3\vec{q})$; в) $(\vec{p} - \vec{q})(\vec{p} + \vec{q})$;

ако $|\vec{p}| = 6$, $|\vec{q}| = 3$ и $(\vec{p}, \vec{q}) = 120^\circ$.

7.10. Примена на скаларен производ на вектори

Непосредно од дефиницијата на скаларниот производ може да изведеме неколку формули кои наоѓаат примена во решавање на геометриски задачи.

Пресметување на должина на вектор

Да ја пресметаме должината $|\vec{a}|$ на векторот $\vec{a}$, ако е познат скаларниот производ на векторот со себе. Од $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ со коренување наоѓаме дека

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{|\vec{a}|^2}.$$

Непосредно заклучуваме дека $|\vec{a}| = 0$ ако и само ако $\vec{a} = \vec{0}$.

Пример 1. Ако за векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, тогаш должината на векторот $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ е еднаква на

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p}} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{16 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 9} = \sqrt{28}. \end{aligned}$$

Пресметување на косинус од агол меѓу два ненулти вектори

Да го пресметаме аголот меѓу два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, е познат нивниот скаларен производ. Од дефиницијата за скаларен производ имаме дека

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

од каде што наоѓаме дека

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Пример 2. За да го најдеме косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{d} = 2\vec{a} + \vec{b}$, за коишто $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, согласно со формула за пресметување агол меѓу два ненулти вектори

$$\cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| |\vec{d}|}$$

потребно е да ги најдеме вредностите $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{c}|$, $|\vec{d}|$ и $\vec{c} \cdot \vec{d}$. Имаме дека

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}} = \sqrt{(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + 4|\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{d}| &= \sqrt{\vec{d} \cdot \vec{d}} = \sqrt{(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})} = \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 4(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2} = \sqrt{52} \end{aligned}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 - 3(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 2|\vec{b}|^2 = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2^2 = 1.$$

$$\text{Според тоа } \cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| |\vec{d}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{52}} \approx 0,13.$$

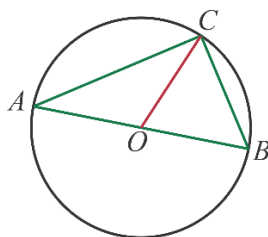
Услов за ортогоналност на два ненулти вектори

Ако $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, тогаш $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ако и само ако $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, што значи $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Така, **условот за ортогоналност на два ненулти вектори** гласи:

Два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ортогонални ако и само ако $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример 3. Докажи ја теоремата на Талес: Секој периферен агол над дијаметар на кружница е прав.

Нека $K(O, r)$ е дадена кружница, AB нејзин дијаметар и C произволна точка од кружницата (цртеж 1).



Цртеж 1

Тогаш $\vec{CA} = \vec{CO} + \vec{OA}$, $\vec{CB} = \vec{CO} + \vec{OB} = \vec{CO} - \vec{OA}$, па имаме дека

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (\vec{CO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{CO} - \vec{OA}) = \vec{CO}^2 - \vec{OA}^2 = r^2 - r^2 = 0$$

од каде што следува дека векторите $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$ се заемно нормални, односно $\angle ACB = 90^\circ$.

Задачи

1. Дадени се векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, за коишто важи $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$ и $(\vec{c}, \vec{a}) = 60^\circ$. Најди ја должината на векторот $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

2. Најди го косинусот од аголот меѓу векторите $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, ако $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.

3. Дадени се векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, така што $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ и $(\vec{c}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) = 60^\circ$. Пресметај го косинусот аголот меѓу векторите $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{y} = \vec{a} - \vec{b}$.

4. Докажи ја Питагоровата теорема: збирот од квадратите на катетите во правоаголен триаголник е еднаков со квадратот на хипотенузата.

5. Најди го аголот што го зафаќаат единичните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако векторите $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ се заемно нормални.

7.11. Скаларен производ на вектори во координатен облик

Во оваа лекција ќе учиме како да пресметуваме скаларен производ на вектори, должина на вектор, агол меѓу два ненулти вектори и ќе го изведеме условот за ортогоналност на два вектори, во случај кога векторите се зададени со своите координати.

Пресметување на скаларен производ на вектори во координатен облик

Ако векторите се зададени со своите координати

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

тогаш важат разложувањата

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ и } \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Заради асоцијативноста, комутативноста и дистрибутивноста на скаларниот производ, имаме

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} + \\ &\quad + (a_x b_y + a_y b_x) \vec{i} \cdot \vec{j} + (a_x b_z + a_z b_x) \vec{i} \cdot \vec{k} + (a_y b_z + a_z b_y) \vec{j} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Бидејќи векторите $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ се единечни и во парови заемно нормални, имаме

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1 \text{ и } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Според тоа, за скаларен производ добиваме

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Пример 1. Ако $\vec{a} = (-2, 0, 6)$ и $\vec{b} = (1, -1, 5)$, тогаш скаларниот производ е
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 6 \cdot 5 = 28.$

Примена на скаларен производ во координатен облик

Должината $|\vec{a}|$ на вектор зададен со своите координати $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ изнесува

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Според тоа, имаме дека формулата за пресметување на должина гласи

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пример 2. Ако $\vec{a} = (3, -1, 4)$, тогаш неговата должина изнесува

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}.$$

Косинусот од аголот меѓу два ненулти вектори зададени со своите координати $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ изнесува

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Според тоа, формулата за пресметување на косинусот од аголот меѓу нив гласи

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Пример 3. За аголот меѓу векторите $\vec{a} = (2, 0, 2)$ и $\vec{b} = (0, 0, 6)$ се добива

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 6^2}} = \frac{12}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{36}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

од каде што следува дека $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

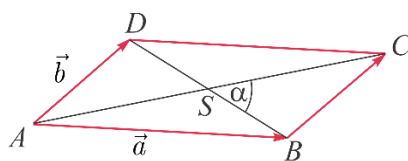
Два ненулти вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ се ортогонални ако и само ако $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$. Според тоа, условот за ортогоналност на два ненулти вектори во координатен облик гласи

Два ненулти вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се ортогонални ако и само ако

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Пример 4. Најди го аголот меѓу дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a} = (2, 1, 0)$ и $\vec{b} = (0, -2, 1)$.

Нека $ABCD$ е дадениот паралелограм и нека $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (цртеж 1).



Цртеж 1

Бараниот агол α е аголот меѓу векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ и може да го пресметаме по формулата $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{DB}|}$.

Скаларниот производ на векторите

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} = (2, -1, 1) \text{ и } \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b} = (2, 3, -1)$$

изнесува $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (2, -1, 1) \cdot (2, 3, -1) = 4 - 3 - 1 = 0$

што значи векторите $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ се ортогонални, па $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Задачи

1. Пресметај го скаларниот производ на векторите

а) $\vec{a} = (-1, 0, 2)$ и $\vec{b} = (0, -4, 7)$; б) $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

2. Пресметај ја должината на векторот

а) $\vec{a} = (0, -5, 4)$; б) $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

3. Најди го аголот меѓу векторите

а) $\vec{a} = (-1, 1, 0)$ и $\vec{b} = (1, -2, 2)$; б) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$.

4. Дадени се точките $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$ и $C(2, 1, 2)$. Пресметајте го аголот меѓу векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Дали се заемно нормални векторите

а) $\vec{a} = (-5, 0, 9)$ и $\vec{b} = (1, 7, -2)$; б) $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$?

7.12. Векторски производ на вектори

Освен скаларниот производ на вектори ќе дефинираме операција, наречена векторско множење.

Поим на векторски производ на вектори

При дефинирање на векторското множење ќе го користиме поимот **десна (лева) тројка вектори**. Три вектори за кои се знае кој од нив е прв, кој е втор, а кој е трет се нарекува **тројка вектори**. На пример, во тројката вектори $\vec{c}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ ќе сметаме дека векторот $\vec{c}$ е прв, векторот $\vec{b}$ е втор, а векторот $\vec{a}$ е трет вектор. Тројката вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ кои не се компланарни се нарекува **десна (лева)** ако векторите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ се распоредени како палецот, показалецот и средниот прст од десната (левата) рака.

Векторски производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарекува векторот $\vec{c}$ за којшто важи

а) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$,

б) $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ и $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, односно векторот $\vec{c}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

в) векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ формираат десна тројка вектори.

Векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ќе го означуваме со $\vec{a} \times \vec{b}$. Да забележиме дека условот под а) го определува модулот на векторскиот производ, условот под б) неговиот правец, додека условот под в) ја определува неговата насока.

Пример 1. Векторскиот производ на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, за коишто $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ има модул

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = 14\sqrt{3}.$$

Својства на векторски производ на вектори

Во продолжение ќе наведеме неколку поважни својства на векторскиот производ.

1. За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ важи

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{антикомутативност})$$

Погорното својство укажува дека кај векторското множење на вектори важен е редоследот на векторите кои го сочинуваат производот.

2. За секои два вектори $\vec{a}, \vec{b} \in V$ и за секој реален број p важи

$$p(\vec{a} \times \vec{b}) = (p\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (p\vec{b}) \quad (\text{асоцијативност})$$

Според искажаното својство, векторски производ се множи со произволен реален број кога ќе се помножи било кој од векторите со дадениот реален број.

3. За секои три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ важи

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{и} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (\text{дистрибутивност})$$

Погорното својство укажува дека до истиот вектор доаѓаме, ако два вектори се соберат и потоа векторски се помножат со трет вектор, или ако секој од собируците се помножи со третиот вектор и потоа да се соберат. Притоа, важен е редоследот на множителите.

4. За секој вектор $\vec{a} \in V$ и за секој реален број p важи $\vec{a} \times (p\vec{a}) = \vec{0}$

Својството се заснова на фактот дека векторите $\vec{a}$ и $p\vec{a}$ се колинеарни, односно $(\vec{a}, p\vec{a}) = 0$.

Задача 2. Пресметај ја должината на векторскиот производ на векторите $\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{y} = \vec{a} + 2\vec{b}$, ако $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

Решение. Имаме дека

$$\vec{x} \times \vec{y} = (3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + 6(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{a}) - 2(\vec{b} \times \vec{b}) = 7(\vec{b} \times \vec{a}).$$

Според тоа, имаме дека

$$|\vec{x} \times \vec{y}| = |7(\vec{b} \times \vec{a})| = 7|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 7 \cdot 4 \cdot 7 \sin \frac{\pi}{3} = 98\sqrt{3}.$$

Задачи

1. Најди го модулот на векторскиот производ $\vec{a} \times \vec{b}$, ако $|\vec{a}| = 12$, $|\vec{b}| = 5$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$.

2. Најди го векторот $\vec{a} \times \vec{b}$, ако $\vec{a} = 4\vec{p} - \vec{q} + 3\vec{r}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + 3\vec{q} - 5\vec{r}$, каде што $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ е десна тројка заемно нормални и единични вектори.

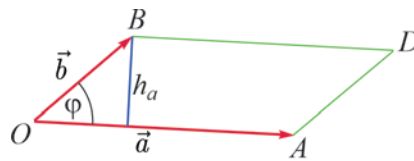
3. Пресметај ја должината на векторскиот производ $\vec{m} \times \vec{n}$, ако $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{n} = 3\vec{a} + \vec{b}$, каде што $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

7.13. Примена на векторски производ на вектори

Непосредно од дефиницијата на векторскиот производ може да изведеме неколку интересни заклучоци коишто наоѓаат примена во решавање на геометриски задачи.

Пресметување на плоштина на паралелограм

Примената на векторскиот производ во решавање на геометриски задачи се базира на фактот дека модулот на векторскиот производ на два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е еднаков на плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$. Значи, имаме дека $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$.



Цртеж 1

Навистина, ако $OADB$ е паралелограмот конструиран над векторите $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$ (цртеж 1), тогаш неговата плоштина изнесува

$$P = |\vec{a}| \cdot h_a = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Пример 1. За да се пресмета плоштината P на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{AB} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{AD} = \vec{a} + 3\vec{b}$, каде $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, се поаѓа од

$$P = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = |\vec{AB}| |\vec{AD}| \sin(\angle \vec{AB}, \vec{AD}).$$

Притоа, имаме дека

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}) = 6(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{a}) = 7(\vec{a} \times \vec{b})$$

Оттука добиваме дека

$$P = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 7 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = 98\sqrt{3}.$$

Пресметување на плоштина на триаголник

Од геометрија е познато дека за плоштината на триаголникот P_T конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и плоштината на паралелограмот P_P конструиран над истите векторите важи равенството $P_T = \frac{1}{2} P_P$. Оттука добиваме дека

$$P_T = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Пример 2. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC , конструиран над векторите $\vec{AB} = \vec{b} + 3\vec{a}$ и $\vec{AC} = \vec{a} - 2\vec{b}$, каде што $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

$$\text{Имаме дека } P_T = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Понатаму, наоѓаме дека $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\vec{b} + 3\vec{a}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = -6(\vec{a} \times \vec{b}) - \vec{a} \times \vec{b} = -7(\vec{a} \times \vec{b})$.

Оттука добиваме дека плоштината на триаголникот ABC изнесува

$$P_T = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 21.$$

Условот за колинеарност на два вектори

Од дефиницијата на векторски производ непосредно следува дека векторскиот производ е нултиот вектор, ако и само ако еден од векторите е нултиот вектор или ако векторите се колинеарни. Според тоа, **условот за колинеарност на два вектори** гласи:

Два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се колинеарни ако и само ако $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Пример 3. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни вектори. Најди ја вредноста на параметарот λ за којашто векторите $\vec{c} = \lambda\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b}$ се колинеарни.

За да ја најдеме вредност на параметарот λ се поаѓа од условот за колинеарност на векторите $\vec{c}$ и $\vec{d}$

$$\vec{c} \times \vec{d} = (\lambda\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{0},$$

односно

$$\lambda\vec{a} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{a} + \lambda\vec{a} \times 3\vec{b} - \vec{b} \times 3\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} + 3\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (1 + 3\lambda)(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

Бидејќи векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не се колинеарни, имаме $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$. Затоа $1 + 3\lambda = 0$,

$$\text{односно } \lambda = -\frac{1}{3}.$$

Задачи

1. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC , конструиран над векторите $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, каде што $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

2. Пресметај ја плоштината на паралелограмот $ABCD$ конструиран над векторите $\overrightarrow{AB} = 3\vec{b} - \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, каде што $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се единични вектори кои зафаќаат агол од 60° .

3. Пресметај ја должината на висината од темето C на триаголникот ABC ако $\overrightarrow{AB} = 2\vec{p} - \vec{q}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, при што векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се заемно нормални единични вектори.

4. Нека $\vec{x}$ и $\vec{y}$ не се колинеарни вектори. За која вредноста на параметарот t векторите $\vec{u} = 3t\vec{x} - \vec{y}$ и $\vec{v} = \vec{x} + 7\vec{y}$ се колинеарни.

7.14. Векторски производ на вектори во координатен облик

Во оваа лекција ќе пресметуваме векторски производ на вектори, плоштина на паралелограм конструиран над два дадени вектори, плоштина на триаголник конструиран над два дадени вектори и ќе го изведеме условот за колинеарност на два вектори, во случај кога векторите се зададени со своите координати.

Пресметување на векторски производ на вектори во координатен облик

Од дефиницијата за векторски производ за единичните координатни вектори имаме дека

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}. \end{array}$$

Ако векторите се зададени со своите координати

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

тогаш важат разложувањата

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ и } \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Заради својствата на векторскиот производ и дефиницијата на детерминанта од втор ред имаме дека

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + \\ &+ a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) = \\ &= a_x b_y \vec{k} + a_x b_z (-\vec{j}) + a_y b_x (-\vec{k}) + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_z b_y (-\vec{i}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}. \end{aligned}$$

Како последица од погорната дискусија, користејќи ја дефиницијата на детерминанта од трет ред (види модулarna единица 8, наставна единица 8.2), векторскиот производ на векторите може да го запишеме во облик

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Пример 1. Да ги определиме координатите на векторскиот производ на векторите $\vec{a} = (0, -3, -1)$ и $\vec{b} = (4, 0, -5)$. Имаме дека

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 15\vec{i} - 4\vec{j} + 0\vec{k} - (-12\vec{k} + 0\vec{i} + 0\vec{j}) = 15\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$$

од каде што добиваме дека $\vec{a} \times \vec{b} = (15, -4, 12)$.

Примена на векторски производ на вектори во координатен облик

Ако векторите се зададени со своите координати, односно ако

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \text{ и } \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

тогаш за плоштината на паралелограмот определен со дадените вектори изнесува

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Според тоа, имаме дека

$$P = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Да ја определиме должината на висината од темето B на триаголникот ABC , за којшто $\vec{AB} = (4, -5, 0)$ и $\vec{BC} = (-4, 9, -3)$.

Плоштината P на триаголникот ABC е еднаква на половина од плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{BA}$ и $\vec{BC}$. Според тоа, имаме дека

$$2P = |\vec{BA} \times \vec{BC}| = |-15\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k}| = \sqrt{225 + 144 + 256} = 25.$$

Од елементарна геометрија е познато дека $2P = |\vec{AC}| |\vec{B_1B}|$, каде што B_1 е подножјето на нормалата спуштена од темето B . Бидејќи $\vec{AB} + \vec{BC} = (0, 4, -3)$ имаме $2P = 5 |\vec{B_1B}|$. Тогаш должината на бараната висина е $|\vec{B_1B}| = 5$.

Ако $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, тогаш условот за нивна колинеарност $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, е исполнет ако и само ако секоја координата на векторскиот производ е еднаква на нула, односно ако $a_y b_z = a_z b_y$, $a_z b_x = a_x b_z$, $a_x b_y = a_y b_x$, или,

$$\frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad \frac{a_z}{b_z} = \frac{a_x}{b_x}, \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}.$$

При претпоставка, дека ако некоја координата на едниот вектор е нула, на пример $a_x = 0$, тогаш мора $b_x = 0$, и по дефиниција се зема $\frac{0}{0} = \frac{a_y}{b_y}$, $\frac{0}{0} = \frac{a_z}{b_z}$.

Според тоа, **условот за колинеарност на два вектори** во координатна форма гласи

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример 3. За да се испита дали векторите $\vec{a} = (2, -4, 6)$ и $\vec{b} = (6, -12, 18)$ се колинеарни, се формираат односите $\frac{2}{6}$, $\frac{-4}{-12}$ и $\frac{6}{18}$. Од

$$\frac{2}{6} = \frac{-4}{-12} = \frac{6}{18}$$

слеува дека дадените вектори се колинеарни.

Задачи

1. Најди го координатното претставување на векторскиот производ на векторите:

а) $\vec{a} = (0, 2, 0)$ и $\vec{b} = (-4, 1, 0)$; б) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

2. Дадени се векторите $\vec{a} = (3, -1, -2)$ и $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Најди ги координатите на векторите:

а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; в) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$.

3. Најди го синусот од аголот меѓу векторите $\vec{a} = (4, -4, 2)$ и $\vec{b} = (10, 15, 18)$.

4. Пресметај ја плоштината на паралелограмот $ABCD$ конструиран над векторите $\vec{AB} = (3, 2, 4)$ и $\vec{AD} = (0, 3, -1)$.

5. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC конструиран над векторите $\vec{AB} = (2, -3, 1)$ и $\vec{AC} = (1, 2, -2)$.

6. За кои вредности на x и y , векторите $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + y\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + x\vec{j} + 8\vec{k}$ се колинеарни?

7.15. Мешан производ на вектори

Решавањето на бројни геометриски задачи значително се олеснува со воведувањето на мешаниот производ на три вектори, којшто има интересна геометриска интерпретација.

Поим за мешан производ на вектори

Мешан производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, е скаларниот производ на векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$, и се означува со $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Пример 1. За да се пресмета мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, коишто се заемно нормални, претставуваат десна тројка вектори и $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 4$ и $|\vec{c}| = 6$, се постапува на следниов начин:

Бидејќи $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, образуваат десна тројка вектори, векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ имаат иста насока, па според тоа имаме

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 90^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ = 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 = 120. \end{aligned}$$

Својства на мешан производ на вектори

Во продолжение ќе наведеме неколку својства на мешаниот производ.

1. За секои вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, важи:

а) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$

б) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}]$

Својството под а) подразбира дека мешаниот производ не се менува при циклично поместување на векторите во мешаниот производ, додека својството под б) подразбира дека мешаниот производ го менува знакот во спротивен ако било кои два вектори од мешаниот производ си ги заменат местата.

Пример 2. За векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, такви што $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, $(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$ и $(\vec{a}, \vec{c}) = 90^\circ$ имаме дека

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 3, \\ [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = |\vec{b} \times \vec{c}| |\vec{a}| \cos(\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) = \\ &= (|\vec{b}| |\vec{c}| \sin 90^\circ) |\vec{a}| \cos 60^\circ = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3. \end{aligned}$$

2. За секој реален број k и секои вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, важи:

$$k[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [k\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, k\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, k\vec{c}]$$

Погорното својство укажува дека мешан производ се множи со реален број кога ќе се помножи било кој од векторите во мешаниот производ со тој реален број.

Пример 3. За векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, такви што $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, и реален број $k = 7$, имаме дека

$$\begin{aligned} k[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= k((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) = k(|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})) = \\ &= k((|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ) = 7(2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1) = 140, \text{ и} \\ [k\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= ((k\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) = (|k\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(k\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})) = \\ &= (|k\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ = (k |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 0^\circ = \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 140. \end{aligned}$$

3. За секои вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, важи

а) $[\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}];$

$$\text{б)} [\vec{a}, \vec{b} + \vec{d}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}];$$

$$\text{в)} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}].$$

Последното својство подразбира дека ако некој вектор во мешаниот производ е збир од два вектори, тогаш мешаниот производ може да се претстави како збир од два мешани производи, во кои сите вектори со исклучок на збирот се исти како во мешаниот производ, додека во првиот мешан производ – собирак односниот вектор е првиот собирак и во вториот мешан производ – собирак односниот вектор е вториот собирак.

Пример 4. Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, се компланарни и нека векторот $\vec{d}$ е нормален на рамнината определена со векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и нека $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$, $|\vec{d}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ и $(\vec{b}, \vec{c}) = 60^\circ$. Имаме дека

$$\begin{aligned} [\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] &= ((\vec{a} + \vec{d}) \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{d} \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} + (\vec{d} \times \vec{b}) \vec{c} = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) + |\vec{d} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{d} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin 30^\circ) |\vec{c}| \cos 90^\circ + (|\vec{d}| |\vec{b}| \sin 90^\circ) |\vec{c}| \cos 30^\circ = \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} + (\vec{d} \times \vec{b}) \vec{c} = \\ &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) + |\vec{d} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{d} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})) |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) + \\ &+ (|\vec{d}| |\vec{b}| \sin(\vec{d}, \vec{b})) |\vec{c}| \cos(\vec{d} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 \end{aligned}$$

Задачи

1. а) Докажи го својството 1. б) Докажи го својството 3. в).

2. Пресметај го мешаниот производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, ако векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, се заемно ортогонални и единични вектори.

3. Пресметај го мешаниот производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, ако векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, се заемно ортогонални и $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ и $|\vec{c}| = 7$.

4. Векторот $\vec{c}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, кои зафаќаат агол од 60° . Пресметај го мешаниот производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, ако $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 4$ и $|\vec{c}| = \sqrt{3}$.

5. Дадени се три единични вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажи дека ако $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, (\vec{a} \times \vec{b})) = \alpha$, тогаш $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

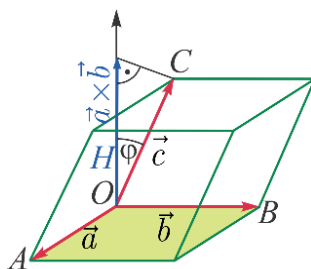
7.16. Примена на мешан производ на вектори

Пресметување на волумен на паралелопипед

Примената на мешаниот производ во решавање на геометриски задачи се базира воглавно на неговата геометриска интерпретација. Имено, мешаниот производ на три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по апсолутна вредност е еднаков на волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ и $\vec{OC} = \vec{c}$. Притоа, знакот на мешаниот производ е позитивен ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е десна тројка вектори, а негативен ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е лева тројка вектори. Значи, имаме дека

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Навистина, нека $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е десна тројка вектори. Да го конструирме паралелопипедот над векторите $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ и $\vec{OC} = \vec{c}$, и да го означиме со ϕ аголот меѓу векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ (цртеж. 1). Тогаш од дефиницијата за скаларен производ имаме $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \phi$.



Цртеж 1

Знаеме дека должината на векторскиот производ $\vec{a} \times \vec{b}$ е бројно еднаква на плоштината B на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$, а тој пак е основа на конструираниот паралелопипед. Од друга страна, производот $|\vec{c}| \cos \phi$ по апсолутна вредност е еднаков на висината H спуштена кон основата на паралелопипедот. Оттука за волуменот V на паралелопипедот добиваме

$$V = B \cdot H = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos \phi = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \pm (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

Според тоа, знакот на мешаниот производ зависи од знакот на изразот $\cos \phi$, односно од аголот меѓу векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$. Притоа $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$ ако и само ако $0^\circ < \phi < 90^\circ$, додека $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ ако и само ако $180^\circ > \phi > 90^\circ$. Бидејќи векторот $\vec{a} \times \vec{b}$ е нормален на рамнината R во која лежат векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можеме да заклучиме дека $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$ ако и само ако векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ се од иста страна на рамнината R , додека $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$ ако и само ако векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ се од различни страни на рамнината R . Оттука заклучуваме дека

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0 \text{ ако и само ако } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ е десна тројка вектори, и}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} < 0$ ако и само ако $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е лева тројка вектори.

Пример 1. Пресметај го волуменот на паралелопипедот определен со векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, кои имаат еднакви должини и $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) = 45^\circ$.

Бидејќи плоштината на основата B и висината H на паралелопипедот се еднакви на

$$B = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$H = |\vec{c}| \cos(\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a}| \cos 45^\circ = \frac{|\vec{a}|}{2},$$

бараниот волумен изнесува

$$V = B \cdot H = \frac{|\vec{a}|^3 \sqrt{2}}{4}.$$

Пресметување на волумен на тетраедар

Од геометрија е познато дека за волуменот на тетраедарот V_T конструиран над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и волуменот на паралелопипедот V_P конструиран над истите векторите важи равенството $V_T = \frac{1}{6} V_P$. Оттука добиваме дека

$$V_T = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

Пример 2. Пресметај го волуменот на тетраедарот определен со единичните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{6}$.

Со непосредна пресметка се добива дека

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{6} |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})| = \\ &= \frac{1}{6} (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})) |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{1}{6} \left| \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} \right| = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}. \end{aligned}$$

Услов за компланарност на три ненулти вектори

Имајќи предвид дека мешаниот производ на три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по апсолутна вредност е еднаков на волуменот на паралелопипедот конструиран над тие вектори, може да заклучиме дека мешаниот производ на три ненулти вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е еднаков на нула, односно $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$, ако и само ако трите вектори се компланарни.

Според тоа, **услов за компланарност на три ненулти вектори** $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ гласи:

Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни ако и само ако $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.

Пример 3. Да проверим дали се компланарни векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{2}$.

Имаме дека

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})) |\vec{c}| \cos(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

од каде што заклучуваме дека дадените вектори се компланарни.

Задачи

1. Пресметај го волуменот на паралелопипедот определен со векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, \vec{a} \times \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

2. Пресметај го волуменот на правоаголен паралелопипед со рабови $a = 5$, $b = 4$ и $c = 6$.

3. Пресметај го волуменот на тетраедарот определен со векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$, ако $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 5$, $|\vec{p}| = 2$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$ и $(\vec{p}, \vec{m} \times \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

4. Дали се компланарни векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ и $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$.

7.17. Мешан производ на вектори во координатен облик

Во оваа лекција ќе учиме како да пресметуваме мешан производ на вектори, волумен на паралелопипед, волумен на тетраедар и ќе го изведеме условот за компланарност на три вектори, во случај кога векторите се зададени со своите координати.

Пресметување на мешан производ на вектори во координатен облик

Да го пресметаме мешаниот производ ако векторите се зададени со своите координати, односно ако

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{и} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z).$$

$$\text{Од } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} \text{ добиваме дека}$$

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot (c_x, c_y, c_z) = \\ &= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_y \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Според тоа, мешаниот производ на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, зададени со своите координати изнесува

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Мешаниот производ на векторите $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, -2)$ и $\vec{c} = (1, 2, 0)$ изнесува

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 8 = -8.$$

Примена на мешан производ на вектори во координатен облик

Ако векторите се зададени со своите координати, односно ако

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{и} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

тогаш за волуменот на паралелопипедот определен со дадените вектори изнесува

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right|.$$

Според тоа, имаме дека

$$V = \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right|.$$

Пример 2. Волуменот на паралелопипедот со векторите $\vec{a} = (2, -2, 8)$, $\vec{b} = (3, -9, 3)$ и $\vec{c} = (18, 12, -30)$ изнесува

$$V = \left| \begin{vmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 3 & -9 & 3 \\ 18 & 12 & -30 \end{vmatrix} \right| = 4104.$$

Ако векторите се зададени со своите координати, односно ако

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{и} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

тогаш за волуменот на тетраедарот определен со дадените вектори изнесува

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right|.$$

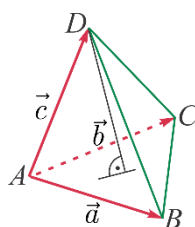
Според тоа, имаме дека

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Точките $A(2, -4, 5)$, $B(-1, -3, 4)$, $C(5, 5, 1)$ и $D(1, 1, -2)$ се темиња на тетраедар. Пресметај ја висината на тетраедарот спуштена од темето D .

Висината на тетраедарот е еднаква на соодветната висина на паралелопипедот конструиран над векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Волуменот на паралелопипедот е $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|$, а плоштината на соодветната основа е $B = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ (цртеж 2). Според тоа, имаме дека

$$H = \frac{V}{B} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}.$$



Цртеж 2

Бидејќи $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 9, -4)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 5, -7)$ имаме дека

$$V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -4 \\ -1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = |189 + 4 - 15 - 9 - 60 + 21| = 130, \text{ и}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 27\vec{k} - 3\vec{k} + 9\vec{i} - 12\vec{j} = 5\vec{i} - 15\vec{j} - 30\vec{k}$$

од каде што наоѓаме дека

$$B = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + (-15)^2 + (-30)^2} = 5\sqrt{46}.$$

Така, добиваме дека

$$H = \frac{V}{B} = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|} = \frac{130}{5\sqrt{46}} = \frac{13\sqrt{46}}{23}.$$

Ако векторите се зададени со своите координати, односно ако

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \quad \text{и} \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

тогаш условот за компланарност на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ гласи

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Навистина, имаме дека

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

ако и само ако $c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_y \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0$. Последното

равенство е еквивалентно со равенството

$$\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) (c_x, c_y, c_z) = 0$$

што значи дека $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = 0$. Тоа значи дека векторите $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$ се заемно нормални, односно векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се компланарни.

Пример 4. Вредноста на параметарот p за којашто векторите $\vec{a} = (1, -3, 1)$, $\vec{b} = (p, 1, 0)$ и $\vec{c} = (1, 4, 8)$ се компланарни може да се добие од условот за компланарност на три вектори. Од условот за компланарност на дадените вектори имаме дека

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ p & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Со развивање на детерминантата на десната страна ја добиваме равенката $28p + 7 = 0$. Со нејзино решавање добиваме дека $p = -\frac{1}{4}$. Според тоа, дадените вектори се компланарни за $p = -\frac{1}{4}$.

Задачи

1. Дадени се векторите $\vec{a} = (1, 5, -1)$, $\vec{b} = (4, 0, -3)$ и $\vec{c} = (0, -3, 1)$. Пресметај го мешаниот производ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

2. Пресметај ја висината на паралелопипедот конструиран над векторите

$$\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k},$$

ако неговата основа е паралелограмот над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Најди го волуменот на тетраедарот определен со векторите $\vec{a} = (0, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 7, -3)$ и $\vec{c} = (4, -2, -1)$.

4. Дали векторите $\vec{a} = (3, 4, 0)$, $\vec{b} = (0, 2, 2)$ и $\vec{c} = (3, 0, 1)$ се компланарни?

5. Најди ја вредноста на параметарот t за којашто векторите $\vec{a} = (t, 1, -2)$, $\vec{b} = (1, t, -1)$ и $\vec{c} = (1, 1, t)$ се компланарни.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Дадени се векторите $\vec{a} = -2\vec{p} + 3\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$ и $\vec{c} = -\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$. Најди вектор $\vec{d}$ така што векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ да формираат четириаголник.

2. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Изрази ги векторите $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DE}$ и $\overrightarrow{EF}$ преку векторите $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

3. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Покажи дека

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}.$$

4. Во тетраедарот $OABC$ дадени се рабовите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Со помош на дадените вектори изрази ги преостанатите рабови на тетраедарот.

5. Отсечката AB е поделена на пет еднакви дела при што првата од делбените точки има координати $C(3, -5, 7)$ а последната $F(-2, 4, -8)$. Најди ги координатите на крајните точки на дадената отсечка.

6. Најди го бројот k , за којшто важи $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + k$.

7. Најди вектор $\vec{c}$ колинеарен со векторот $\vec{a} + \vec{b}$, ако $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = 18$ и $|\vec{b}| = 2$.

8. Најди го аголот меѓу векторите $\vec{x} = \vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{y} = \vec{p} - \vec{q}$, ако $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 3$.

9. Најди ги должините на дијагоналите на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ на $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$ ако $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 1$ и $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$.

10. Дадени се векторите $\vec{a} = (2, -3, 1)$ и $\vec{b} = (1, 2, -2)$. Најди ги векторските производи

а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $\vec{b} \times \vec{a}$; в) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a})$.

11. Дадени се векторите $\vec{a} = 2\lambda\vec{j} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Најди вектор $\vec{d}$ кој ги задоволува условите $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{d}$ и $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.

12. Дадени се векторите $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$. Најди вектор $\vec{p}$ така што $\vec{p} \cdot \vec{a} = 3$ и $\vec{p} \times \vec{b} = \vec{c}$.

13. Дадени се векторите $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Најди ги координатите на векторите $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ и $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$.

14. Најди ги плоштината на паралелограмот $OABC$ и аголот меѓу векторите $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

15. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC конструиран над векторите $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (-2, 3, -3)$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b} = (1, 3, -5)$.

16. Пресметај ја плоштината на паралелограмот чии дијагонали се формирани со векторите $\overrightarrow{AC} = \vec{a} = (3, 1, -2)$ и $\overrightarrow{BD} = \vec{b} = (1, -3, 4)$.

17. Дадени се векторите $\vec{a} = (1, 2x, -3)$ и $\vec{b} = (2, x, -2x)$. За кои вредности на x дадените вектори се меѓусебно:

- а)** нормални; **б)** паралелни?

18. За која вредност на параметарот t векторите $\vec{a} = (\log(t-2), -2, 6)$, $\vec{b} = (t, -2, 5)$ и $\vec{c} = (0, -1, 3)$ се компланарни?

19. Пресметај го волуменот на паралелопипедот конструиран над векторите $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (2, 2, -1)$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = (3, -1, 0)$.

20. Пресметај ја висината на паралелопипедот конструиран над векторите $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (3, -2, 5)$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (1, -1, 4)$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = (1, -3, 1)$, ако негова основа е паралелограмот над векторите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

8. МАТРИЦИ

8.1. Детерминанти од втор ред

Нека a, b, c и d се дадени реални броеви и ad, bc се соодветните производи.

Вредноста на изразот $ad - bc$, запишан шематски $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ се нарекува **детерминанта од втор ред**; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Броевите a, b, c и d се нарекуваат **елементи на детерминантата**. Тие се распоредени во две **редици** (хоризонтално) и во две **колони** (вертикално), а накрсно формираат две **дијагонали**. Првата редица ја сочинуваат броевите a и b , а втората броевите c и d . Првата колона ја сочинуваат броевите a и c , а втората броевите b и d . Броевите a и d ја формираат **главната дијагонала**, а броевите b и c ја формираат **споредната дијагонала**.

Согласно со горекажаното може да заклучиме дека детерминантата од втор ред е еднаква на разликата од производите на елементите од главната и од споредната дијагонала.

Пример 1. Велíme дека вредноста на детерминантата е -23 , бидејќи

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 - 5 \cdot 3 = -8 - 15 = -23.$$

Детерминантите од втор ред ги имаат следниве својства:

1. Вредноста на детерминантата не се менува, ако редиците се заменат со колони, запазувајќи го редниот број, т.е. значи $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Пример 2. Вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 12 - 5 = 7$, е еднаква со вредноста на детерминантата добиена со замена на редиците со колони

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 = 12 - 5 = 7.$$

2. Детерминанта со две еднакви редици (колони) има вредност нула; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \left(\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0 \right)$.

Пример 3. За вредноста на детерминантата со две еднакви редици имаме

$$\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 4 \cdot 7 = 28 - 28 = 0.$$

3. Со замена на местата на двете редици (колони), вредноста на детерминантата го менува знакот во спротивен; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ $\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \right)$.

Пример 4. Вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 4 = 6 - 24 = -18$, додека вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 24 - 6 = 18$.

4. Ако елементите на една редица (колона) се еднакви на нула, тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула; значи $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Пример 5. За вредноста на детерминантата чии елементи на првата редица се еднакви на нула имаме

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \cdot 8 - 0 \cdot 2 = 0 - 0 = 0.$$

5. Вредноста на детерминантата се множи со број, кога со тој број ќе се помножат сите елементи на една редица (колона); значи $k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} \quad \left(k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} \right)$.

Пример 6. Вредноста на детерминантата поможена со бројот 7 е

$$7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 7(1 \cdot 9 - 6 \cdot 3) = 7 \cdot (-9) = -63,$$

додека вредноста на детерминантата во која сите елементи на првата редица се помножени бројот 7 е $\begin{vmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = (7 \cdot 1) \cdot 9 - (7 \cdot 6) \cdot 3 = 63 - 126 = -63$.

6. Ако соодветните елементи од двете редици (колони) се пропорционални, вредноста на детерминантата е еднаква на нула; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix} = 0 \right)$.

Пример 7. За вредноста на детерминантата во која елементи од двете редици се пропорционални имаме

$$\begin{vmatrix} 14 & 8 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 14 \cdot 4 - 8 \cdot 7 = 56 - 56 = 0.$$

7. Вредноста на детерминантата не се менува, ако кон елементите на една редица (колона) ги додадеме соодветните елементи од друга редица (колона) помножени претходно со ист број k ; значи $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} \quad \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix} \right)$.

Секое од горниве својства на детерминантите од втор ред, лесно може да се про-

вери со пресметување на вредноста на секоја детерминанта од двете страни на соодветното равенство. За илустрација ќе го изведеме својството 7.

$$D = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} = (a+kc)d - (b+kd)c =$$

$$= ad + kcd - bc - kdc = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = L$$

Задачи

1. Пресметај ги вредностите на следниве детерминанти:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & a \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & a^2 - ab + b^2 \\ a + b & a - b \end{vmatrix}$.

2. Реши ги равенките:

а) $\begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 - x & x^2 \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x+2 & (x+2)^2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Реши ги неравенките:

а) $\begin{vmatrix} x & -2 \\ 4x & 2 \end{vmatrix} > 5$; б) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} > 8$; в) $\begin{vmatrix} 3x & x \\ 2x & -4 \end{vmatrix} > -14$.

8.2. Детерминанти од трет ред

Поим за детерминанта од трет ред

Нека a_i, b_i, c_i ($i=1,2,3$) се дадени реални броеви. Вредноста на изразот

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

запишан шематски

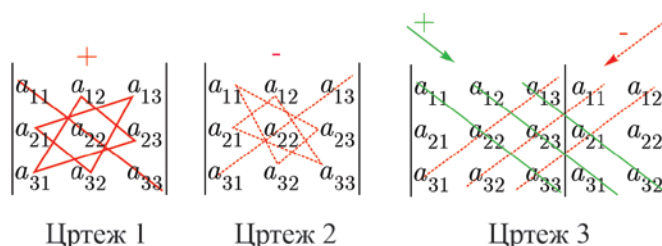
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

се нарекува **детерминанта од трет ред**. Значи,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Броевите a_i, b_i, c_i ($i=1,2,3$) се нарекуваат **елементи на детерминантата**. Елементите се распоредени во **три редици** (хоризонтално) и во **три колони** (вертикално). Елементите a_1, b_2, c_3 ја сочинуваат **главната дијагонала**, а a_3, b_2, c_1 ја сочинуваат **споредната дијагонала** на детерминантата.

Во изразот претставен со детерминантата од трет ред, првите три собирци претставуваат производи од по три елементи, кои лежат на главната дијагонала (a_1, b_2, c_3) и во темињата на триаголниците, чији основи се паралелни со главната дијагонала (a_2, b_3, c_1) и (a_3, b_1, c_2) , (цртеж 1). Следниве три члена од равенството што се земени со негативен знак, претставуваат производи од по три елементи, кои лежат на споредната дијагонала (a_3, b_2, c_1) и во темињата на триаголниците сп основи паралелни со споредната дијагонала (a_2, b_1, c_3) и (a_1, b_3, c_2) , (цртеж 2).



За пресметување на вредноста на детерминантата од трет ред го користиме и таканареченото **Сарусово правило**. Според ова правило, за да ја пресметаме вредноста на детерминантата, десно од неа ги допишуваме првата и втората колона, при што тие се четвртата и петтата колона на нова правоаголна шема. Потоа производите на елементите (по три), што лежат на главната дијагонала и на двете дијагонали паралелни на неа ги земаме со позитивен знак, а производот на елементите (по три) што лежат на споредната дијагонала и на двете дијагонали паралелни на неа ги земаме со негативен знак и овие шест производи ги собираме (цртеж 3).

Пример 1. Вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ изнесува

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 4 = 39.$$

Развивање на детерминантата по елементите на дадена редица (колона)

Елементите на детерминантата кои се произволно дадени реални броеви (општи броеви) понекогаш е погодно да се запишуваат со една буква, ставајќи до неа два индекса што ќе ни го покажуваат редниот број на редицата и редниот број на колоната на кои им припаѓа дадениот елемент. По договор, првиот индекс секогаш ќе го означува редниот број на редицата, а вториот индекс – редниот број на колоната. Така, на пример, за $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ a_{ij} е елемент од i -та редица и j -та колона на детерминантата од трет ред

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Оваа детерминанта ќе ја сметаме за општа дадена детерминанта од трет ред и кратко ќе ја означуваме со Δ . За неа ќе воведеме два нови поима кои се однесуваат на сите детерминанти од трет ред. Тоа се поимите **минор** и **алгебарски комплемент** соодветни на даден елемент на детерминантата.

За произволно избрани i, j ($1 \leq i, j \leq 3$), ако ја прецртаме i -тата редица и j -тата колона на детерминантата од трет ред, преостанатите елементи формираат детерминанта од втор ред Δ_{ij} , која се вика **минор** на елементот a_{ij} .

Пример 2. Бидејќи секој елемент има свој минор, може да заклучиме дека една детерминанта од трет ред има девет различни минори. Еве три од нив кои одговараат на елементите a_{12} , a_{23} , a_{31} , соодветно:

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебарски комплемент на елементот a_{ij} на детерминанта од трет ред се вика бројот $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, каде што Δ_{ij} е минорот на елементот a_{ij} .

Пример 3. Алгебарските комплементи на елементите a_{31} и a_{23} се соодветно:

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \Delta_{31} = \Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \Delta_{23} = -\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Вредноста на детерминантата од трет ред може да се добие со помош на елементите на една редица (колона) и нејзе соодветните минори, односно со **развивање на детерминантата** по елементите на избрана редица (колона). Имено, вредноста на детерминантата од трет ред е еднаква на збирот од производите на елементите на која било i -та редица (j -та колона) помножени со нивните соодветни алгебарски комплементи

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

$$(\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + a_{3j} \cdot A_{3j}, \quad 1 \leq j \leq 3).$$

Пример 4. Да ја развиеме детерминантата по втората редица ($i = 2$). Имаме

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} = \\ &= a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) + a_{23}(a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}) = \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}. \end{aligned}$$

Пример 5. Да ја пресметаме детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Со развивање по елементите на првата редица добиваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -9.$$

Развивањето на детерминантата е корисно да се врши по онаа редица или колона која содржи нулти елементи.

Пример 6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 8 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = 8(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 56.$

Детерминантата од облик $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$ се нарекува **горнотриаголна**, а детерминантата од обликот $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ се нарекува **долнотриаголна**.

Лесно се проверува дека $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$

Пример 7. Детерминантата $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ е горнотриаголна, додека детерминантата

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 7 & -21 & -5 \end{vmatrix}$ е долнотриаголна.

Задачи

1. Пресметај ги вредностите на детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$ **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix};$ **в)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix};$ **г)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

2. Реши ги равенките по непознатата x :

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ **б)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & (x+1)^3 \end{vmatrix} = 0;$ **в)** $\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ x & b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0.$

3. Пресметај ги вредностите на детерминантите:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix};$$

каде што x, y, a, b се произволно дадени реални броеви.

4. Пресметај ги детерминантите со развивање по елементите на некоја од редиците:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

5. Пресметај ги детерминантите со развивање по елементите на некоја од колоните:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix};$$

каде x, y, z се произволно дадени реални броеви.

8.3. Својства на детерминантите од трет ред

Во оваа лекција ќе наведеме некои својства на детерминантите од трет ред.

1. Детерминантата не ја менува вредноста, ако редиците се заменат со колони, запазувајќи го редниот број; значи

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Навистина, да ја означиме со Δ детерминантата од левата страна на равенството, а со $\bar{\Delta}$ – детерминантата од десната страна на равенството. Ако детерминантата Δ ја развиеме по елементите на првата редица, а $\bar{\Delta}$ – по елементите на првата колона, добиваме

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad \text{и} \quad \bar{\Delta} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

од каде што следува $\Delta = \bar{\Delta}$.

Пример 1. Вредноста на детерминантата

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & -3 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -319$$

е еднаква со

вредноста на детерминантата добиена со замена на првата редица со првата колона

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -319.$$

2. При замена на местата на две редици (колони), вредноста на детерминантата го менува својот знак во спротивен.

Ако $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, тогаш $\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$ е добиена од детерминантата Δ со

замена на местата на првата и на третата колона. Развивајќи ја детерминантата $\bar{\Delta}$ по елементите на првата колона, добиваме

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) + a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) - a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \\ &= -a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Развивајќи ја сега детерминантата Δ по елементите на третата колона, добиваме

$$\Delta = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \text{ Значи, } \bar{\Delta} = -\Delta.$$

Пример 2. Вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & -3 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 134$, додека вредноста на

детерминантата добиена со замена на местата на првата со втората редица е $\begin{vmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -134$.

3. Детерминанта со две еднакви редици (колони) има вредност нула.

Навистина, ако во детерминантата Δ двете еднакви редици си ги заменат местата, вредноста на детерминантата останува иста, но според својството 2, вредноста на детерминантата мора да го промени знакот во спротивен. Затоа, мора да биде $\Delta = -\Delta$, или $2 \cdot \Delta = 0$. Оттука $\Delta = 0$.

Пример 3. За вредноста на детерминантата со две еднакви колони имаме

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 9 & 7 & 9 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Ако сите елементи на една редица (колона) се нулти, тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

Навистина, со развивање на детерминантата Δ по редицата (колоната), во која сите елементи се нула, добиваме $\Delta = 0$.

Пример 4. За вредноста на детерминантата чии елементи на третата редица се еднакви на нула имаме $\begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

5. Детерминанта се множи со број кога со тој број ќе се помножат сите елементи на една иста редица (колона).

$$\Delta = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}.$$

Навистина, со развивање на детерминантата Δ по елементите на првата колона добиваме

$$\Delta = ka_{11}A_{11} + ka_{21}A_{21} + ka_{31}A_{31} = k(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}).$$

Пример 5. Вредноста на детерминантата помножена со бројот 3 изнесува

$$3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 8 & 7 & 9 \\ -4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -1281, \text{ додека вредноста на детерминантата во која сите елементи на}$$

$$\text{третата колона се помножени со бројот 3 е } \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 8 & 7 & 27 \\ -4 & 9 & 6 \end{vmatrix} = -1281.$$

6. Ако соодветните елементи на две редици (колони) се пропорционални, тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

$$\text{Ако претпоставиме дека } \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix}, \text{ тогаш повикувајќи се прво на}$$

својството 5, а потоа на својството 3, добиваме

$$\Delta = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0.$$

Пример 6. За вредноста на детерминантата во која елементи од првите две

$$\text{колони се пропорционални имаме } \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 9 \\ -5 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Ако секој елемент на некоја редица (колона) на детерминантата Δ е збир од n собироци, тогаш Δ може да се претстави како збир $\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$ од n детерминанти, во кои сите елементи со исклучок на елементите од односната редица (колона) се исти како во Δ . Во првата детерминанта – собирик Δ_1 односната редица (колона) се состои од првите собироци, во втората се состои од вторите, итн. и во n -тата се состои од n -тите собироци.

За да се утврди равенството

$$\begin{vmatrix} a_1 + s_1 + p_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + s_2 + p_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + s_3 + p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

доволно е почетната детерминанта да ја развиеме по првата колона.

Пример 7. Елементите на првата колона на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 9 \\ -5 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

соодветно, се зборови од соодветните елементи на првите колони на детерминантите

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -3 & -11 & 2 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -2 & -11 & 2 \end{vmatrix}, \text{ односно важи равенството}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 9 \\ -5 & -11 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -3 & -11 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 9 \\ -2 & -11 & 2 \end{vmatrix}.$$

8. Ако кон елементите на една редица (колона) на детерминантата се додадат соодветните елементи на друга редица (колона) претходно помножени со еден ист број k , тогаш не се менува вредноста на детерминантата.

Со последователно користење на својството 7, на својството 5 и на својството 3, имаме

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пример 8. Вредноста на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & 8 & 9 \\ -5 & -11 & 2 \end{vmatrix} = 31, \text{ додека вредноста на}$$

детерминантата добиена со множење на првата колона со бројот 4 и додавање на

третата колона е

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 11 \\ 4 & 8 & 25 \\ -5 & -11 & -18 \end{vmatrix} = 31.$$

9. Ако елементите на една редица (колона) на детерминантата се линеарни комбинации на соодветните елементи на другите две редици (колони), тогаш вредноста на детерминантата е еднаква на нула.

Со примена на својството 7 и на својството 6, добиваме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & xa_{11} + ya_{12} \\ a_{21} & a_{22} & xa_{21} + ya_{22} \\ a_{31} & a_{32} & xa_{31} + ya_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & xa_{11} \\ a_{21} & a_{22} & xa_{21} \\ a_{31} & a_{32} & xa_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ya_{12} \\ a_{21} & a_{22} & ya_{22} \\ a_{31} & a_{32} & ya_{32} \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

Пример 9. Елементите во третата колона во појдовната детерминанта се зборови од соодветните елементи на првата и втората колона, па имаме дека

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ -5 & -11 & -16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3+6 \\ 4 & 8 & 4+8 \\ -5 & -11 & -5-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \\ -5 & -11 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \\ -5 & -11 & -11 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

10. Збирот на производите на елементите на било која редица (колона) со соодветните алгебарски комплементи на елементите од друга редица (колона) е еднаков на нула.

За проверка на ова својство, елементите на третата колона ќе ги помножиме соодветно со алгебарските комплементи на елементите од првата колона, односно ќе покажеме дека важи равенството

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0.$$

Бидејќи алгебарските комплементи на елементите од првата колона се формираат без употреба на елементите од таа колона, за кои било броеви x, y, z важи равенството

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = xA_{11} + yA_{21} + zA_{31}.$$

Посебно за $x = a_{13}, y = a_{23}, z = a_{33}$, добиваме дека

$$a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 10. Ако елементите на третата колона на детерминантата

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix} \text{ ги}$$

помножиме соодветно со алгебарските комплементи на елементите од првата колона добиваме дека

$$(-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 0.$$

Задачи

1. Користејќи ги својствата на детерминанта од трет ред, најди ги вредностите на следниве детерминанти:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

2. Користејќи ги својствата на детерминанта, следните детерминанти доведи ги до горнотриаголна форма, а потоа пресметај ги нивните вредности:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Реши ги равенките по непозната x со користење на својствата на детерминанти:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 1 & 2 & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & (x+1)^3 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} a & x & 1 \\ x & b & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Користејќи ги својствата на детерминанта од трет ред, докажи ги следните идентитети.

$$4. \begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \quad 5. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ac \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0.$$

$$6. \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2.$$

8.4. Систем од три линеарни равенки со три непознати

Детерминантите од трет ред, аналогно на детерминантите од втор ред, може да ги користиме за решавање на системи од три линеарни равенки со три непознати.

Нека е даден општ систем од три линеарни равенки со три непознати, x , y , z , во кој коефициентите на системот од практични причини се означени со иста буква и два индекси, a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, а слободните членови со b_i , $i = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Коефициентите пред x , y и z ја образуваат **детерминанта на системот**, означена со Δ ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

додека детерминантите

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

се нарекуваат **детерминанти на непознатите** x , y и z , соодветно.

Да се реши системот значи да се најдат вредности на непознатите, ако постојат, кои ги задоволуваат трите равенки на системот и претставуваат негово решение или да се утврди противречност на системот.

Ако системот (1) е **нехомоген**, односно ако барем еден од слободните членови b_i , $i = 1, 2, 3$, не е нула, тогаш можни се следниве случаи.

Случај I. Ако $\Delta \neq 0$, тогаш системот (1) има единствено решение

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Погорните формули се викаат **Крамерови формули**, а решението добиено со примена на овие формули се вели дека е добиено со Крамерово правило.

Пример 1. Системот равенки

$$\begin{cases} -2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 4y + 5z = -3 \end{cases}$$

има единствено решение бидејќи $\Delta = 4 \neq 0$. Имаме дека $\Delta_x = 4$, $\Delta_y = 4$ и $\Delta_z = 0$, од каде што добиваме

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{4} = 0.$$

Случај II. Нека $\Delta = 0$. Можни се следниве два случаи:

II₁. Ако барем една од детерминантите $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ е различна од нула, тогаш системот (1) е противречен.

Пример 2. Системот равенки

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

е противречен бидејќи $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 1 \neq 0$.

II₂. Ако $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, тогаш системот равенки (1) има или бескрајно многу решенија или е противречен.

Пример 3. За системот

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 2x + 6y + 2z = 4 \\ 3x + 9y + 3z = 6 \end{cases}$$

имаме дека $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, што значи дека тој има бескрајно многу решенија или е противречен. Уочувајќи дека системот може да се запише како

$$\begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 2(x + 3y + z) = 2 \cdot 2 \\ 3(x + 3y + z) = 2 \cdot 3 \end{cases}$$

имаме дека решенијата на системот се решенија на равенката $x + 3y + z = 2$ којашто има бескрајно многу решенија; тројката $x, y, z = 2 - x - 3y$ е општо решение на системот за произволно избрани реални броеви x, y .

Пример 4. За системот

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 6x - 3y + 3z = 6 \\ 8x - 4y + 4z = 4 \end{cases}$$

имаме дека $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, што значи дека тој има бескрајно многу решенија или

е противречен. Системот е еквивалентен со системот
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3(2x - y + z) = 3 \cdot 2, \text{ којшто е пак,} \\ 4(2x - y + z) = 4 \cdot 1 \end{cases}$$

еквивалентен со системот
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2. \text{ Последниот систем очигледно е противречен,} \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$$

што значи дека и дадениот систем е противречен.

Ако системот (1) е **хомоген**, односно ако сите слободни членови b_i , $i=1,2,3$, се еднакви на нула, тогаш очигледно е дека секогаш има **нулто** или **тривијално решение** $x=0$, $y=0$, $z=0$. Системот има нетривијални решенија ако и само ако детерминантата на системот е еднаква нула, односно $\Delta=0$.

Пример 5. Системот линеарни равенки
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$$
 нема ненулта решение

бидејќи $\Delta=2 \neq 0$.

Пример 6. Системот линеарни равенки
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$
 има бескрајно многу

решенија бидејќи $\Delta=0$. За да ги најдеме ненултите решенија постапуваме на следниов начин: Од втората равенка на системот се добива $z=-2x-y$ и со замена на z со изразот $-2x-y$ првата и третата равенка се сведуваат на равенките $2x+y=0$ и $-2x-y=0$. Оттука за произволно избран реален број t тројката $x=t$, $y=-2t$, $z=0$ претставува решение на системот.

Пример 7. Во зависност од параметарот m да го дискутираме решението на системот равенки:
$$\begin{cases} x - my + z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 2mx - y + z = 11. \end{cases}$$

Имаме дека

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2m & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2m^2 - 2 - 6m - 1 + 2m = 2m^2 - 4m = 2m(m-2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -m & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 11 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 11m - 3 - 33 - 4 + 3m = 14m - 28 = 14(m-2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2m & 11 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8m + 22 - 6m + 11 - 8 = -14m + 28 = 14(2-m)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -m & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2m & -1 & 11 \end{vmatrix} = 33 - 6m^2 - 8 - 24m + 3 + 22m = -6m^2 - 2m + 28 =$$

$$= -6(m-2)(m + \frac{7}{3})$$

Дискусија на решението во зависност од параметарот m :

1⁰ За $m \neq 0$ и $m \neq 2$, $\Delta \neq 0$ и системот има единствено решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14(m-2)}{2m(m-2)} = \frac{7}{m}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14(2-m)}{2m(m-2)} = \frac{-7}{m};$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-6(m-2)(m + \frac{7}{3})}{2m(m-2)} = -3 - \frac{7}{m}$$

2⁰ За $m = 2$, $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Множејќи ја првата равенка со 2 и додавајќи ја на втората се добива третата равенка. Според тоа, системот има бесконечно решенија. Општото решение може да се најде од првите две равенки:

$$x - 2y + z = 4$$

$$2x + 3y - z = 3$$

и тоа е $(x, 7-3x, 18-7x)$.

3⁰ За $m = 0$, $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$, па системот нема решение.

Задачи

1. Реша ги системите линеарни равенки:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ x + 2y - 3z = -6 \\ 4x - 5y - 2z = 12 \end{cases}; \quad \text{б)} \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 1 \end{cases}; \quad \text{в)} \begin{cases} 4x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ x - 3y + 4z = -2 \end{cases}.$$

2. Провери дека системот линеарни равенки $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + z = 2 \end{cases}$ за секоја вредност на

параметарот a има единствено решение. Најди го тоа решение.

3. Најди ги сите решенија на системот хомогени линеарни равенки:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x + 7y + 3z = 0 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}; \quad \text{б)} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 7y - z = 0 \\ 3x - 5y + 3z = 0 \end{cases}.$$

4. Провери дека за произволни вредности на параметрите a, b и c , системот

$$\begin{cases} ay + bz = 0 \\ -ax + cz = 0 \\ -bx - cy = 0 \end{cases} \text{ има бесконечно многу решенија.}$$

5. Докажи дека системот линеарни равенки
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + z = 2 \end{cases}$$
 за секоја вредност на

параметарот a има единствено решение. Најди го тоа решение.

6. Испитај за кои вредности на параметарот a системот равенки

$$\begin{cases} 2x + ay - z = 8 \\ ax + 2y + z = 20 \\ x + y - 2z = -5 \end{cases}$$

- а) има бескрајно многу решенија;
б) е противречен; в) има единствено решение.

8.5. Поим за матрица

Во економијата многу често анализата на различни видови податоци бара нивно претставување со табела. На пример, градежна фирма која гради три типови на куќи, со помош на табела ги претставила бројот на единици од секој вид материјал потребен за нивната изградба.

	Куќа за живеење	Викендичка на море	Викендичка на планина
Дрво	20	12	36
Железо	56	66	14
Цемент	68	84	24
Камен	15	70	40

Броевите од табелата можеме да ги запишеме во вид на правоаголна шема

$$\begin{bmatrix} 20 & 12 & 36 \\ 56 & 66 & 14 \\ 68 & 84 & 24 \\ 15 & 70 & 40 \end{bmatrix}$$

која на поедноставен начин ги дава сите информации што ги содржи погорната табела. Ваквото размислување дава мотивација за воведување и изучување на поимот матрица.

Правоаголна шема од облик

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

каде што $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, се вика **матрица**, и се означува со

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Нека $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ е дадена матрица. m – те хоризонтални n – торки $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ се нарекуваат **редици** на матрицата, а n – те вертикални m – торки $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ се викаат **колони** на матрицата. Броевите a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, се нарекуваат **елементи** на матрицата. Елементот a_{ij} се нарекува ij – ти елемент и се наоѓа во пресекот на i – тата редица и j – тата колона. Матрицата со m редици и n колони се нарекува $m \times n$ матрица или матрица од ред $m \times n$.

Пример 1. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 & 0 \\ 9 & 0 & 7 & 10 \\ 6 & 8 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ е матрица од ред 3×4 , би-

дејќи има три редици и четири колони. Поточно, трите четворки од реални броеви $(4, 1, -6, 0)$, $(9, 0, 7, 10)$ и $(6, 8, -2, 5)$, ги сочинуваат првата, втората и третата редица, соодветно, на матрицата A , додека четирите вертикални тројки од реални броеви, $(4, 9, 6)$, $(1, 0, 8)$, $(-6, 7, -2)$ и $(0, 10, 5)$, ги сочинуваат првата, втората, третата и четвртата колона, соодветно, на матрицата A . Освен тоа, на пример $a_{23} = 7$, односно елементот 7 се наоѓа во пресекот на втората редица и третата колона. Слично $a_{11} = 4$, $a_{14} = 0$, $a_{33} = -2$ итн.

За две $m \times n$ матрици од ист ред $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ велиме дека се **еднакви**, ако $a_{ij} = b_{ij}$, за $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$.

Пример 2. Матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ не се еднакви, бидеј-

ќи A е 2×3 матрица, а B е 3×2 матрица.

Пример 3. Матриците $A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ се еднакви ако $x = 3$, $y = 1$, $z = 5$ и $t = 4$.

Нека A е $m \times n$ матрица. **Транспонирана матрица** A^t на A е $n \times m$ матрица во која што редиците на A претставуваат колони на A^t , а колоните на A претставуваат редици на A^t , соодветно. Со други зборови, ако $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $A^t = [a_{ij}^t]$, тогаш $a_{ij}^t = a_{ji}$. Имено,

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Пример 4. Транспонирана на 3×2 матрицата $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, е 2×3

матрицата $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Матрица A се вика **квадратна**, ако бројот на редици е еднаков со бројот на колони. Ако бројот на колони, односно редици е n , велиме дека A е квадратна матрица од ред n или n – квадратна матрица. Елементите $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ја сочинуваат главната дијагонала.

Пример 5. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ е квадратна матрица од ред 3 со

дијагонални елементи 1, 2, 3.

Квадратната матрица кај која сите елементи што не се на главната дијагонала се еднакви на нула, се нарекува **дијагонална матрица**, т.е.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Дијагоналната матрица се нарекува **скаларна** ако $d_1 = d_2 = \dots = d_n$.

Ако сите елементи над главната дијагонала се еднакви на 0, квадратната матрица се нарекува **долнотриаголна**, т.е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

и аналогно ако сите елементи под главната дијагонала се еднакви на нула, се нарекува **горнотриаголна**, т.е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ако за елементите на квадратната матрица важи $a_{ij} = a_{ji}$ за секои $i, j = 1, \dots, n$, тогаш матрицата се нарекува **симетрична**. Така, на пример, симетрична е матрицата

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 19 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 67 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 15 \end{bmatrix}.$$

Единична матрица од ред n е матрица чиито дијагонални елементи се еднакви на 1 и сите останати се еднакви на нула; се означува со

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 6. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ итн.

За секоја квадратна матрица A од ред n е точно дека $AI_n = I_n A = A$.

Задачи

1. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 41 & 1 & 16 & 0 \\ 9 & 30 & -9 & 10 \\ 62 & 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

а) Од кој ред е матрицата A ?

б) Запиши ги првата редица и третата колона на матрицата A ;

в) Запиши ги елементите a_{13} , a_{24} , a_{33} , a_{32} , a_{14} и a_{21} на матрицата A .

2. Дали се еднакви матриците:

а) $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$?

Образложи го одговорот!

3. За кои вредности на параметрите a , b , c и d , се еднакви матриците

$$A = \begin{bmatrix} a & b & a+b \\ c & d & c-d \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} c-d & 2d & 1 \\ -a-b & c-a & a \end{bmatrix}?$$

4. Запиши ја транспонираната матрица на матрицата $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

5. Дадена е матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -7 \\ -1 & 12 & -4 \end{bmatrix}$.

а) Од кој ред е матрицата A ?

б) Запиши ги дијагоналните елементи на матрицата.

6. Фабрика за пијалоци која произведува четири видови пијалоци и ги продава во пет градови. Разгледај ја продажбата:

- првиот град по видови пијалоци: 40, 60, 20 и 30 илјади шишиња;
- вториот град по видови пијалоци: 50, 50, 15 и 35 илјади шишиња;

- третиот град по видови пијалоци: 40, 45, 25 и 40 илјади шишиња;
- четвртиот град по видови пијалоци: 30, 20, 10 и 20 илјади шишиња;
- петтиот град по видови пијалоци: 35, 40, 15 и 25 илјади шишиња.

Запиши ги добиените резултати со помош на матрица.

7. Три недвижности k_1, k_2 и k_3 може да бидат купени од четири фирми A_1, A_2, A_3 и A_4 .

а) Формирај 4×3 матрица $B = [b_{ij}]$ каде b_{ij} прима вредност 1 ако капиталот за инвестиции на фирмата A_i е поголем од цената на чинење на недвижноста k_j , прима вредност 0 ако капиталот за инвестиции на фирмата A_i е колку цената чинење на недвижноста k_j , прима вредност -1 ако капиталот за инвестиции на фирмата A_i е помал од цената на чинење на недвижноста k_j .

б) Формирај 3×4 матрица $C = [c_{ij}]$, каде c_{ij} прима вредност 1 ако цената на чинење на недвижноста k_i е помала од капиталот за инвестиции на фирмата A_j , прима вредност 0 ако цената на чинење на недвижноста k_i е колку капиталот за инвестиции на фирмата A_j , прима вредност -1 ако цената на чинење на недвижноста k_i е поголема од капиталот за инвестиции на фирмата A_j .

в) Дали се еднакви матриците B и C ?

8.6. Собирање и одземање на матрици. Множење на матрица со број

Со претставувањето на податоците во вид на матрица може да ги анализираме и да донесуваме деловни одлуки со дефинирање на операции со матрици.

Нека $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ се $m \times n$ матрици. **Збир** $A + B$ на матриците A и B е матрица $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ каде $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, за $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, и пишуваме $C = A + B$.

Со други зборови, матрицата C е од ист ред како и матриците A и B , а нејзините елементи се зборови на соодветните елементи на матриците A и B . Да забележиме дека операцијата собирање на матрици е дефинирана само за матрици од ист ред.

Пример 1. Најди го збирот на матриците $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Според дефиницијата

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3-2 & 4-3 \\ 5+0 & 2-1 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 2. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ги прикажува набавните и продажните цени (по редици) на три различни стоки во едно трговско друштво (по ко-

лони). Ако набавната цена на секоја стока се зголеми за 0,5 денари, а продажната цена се зголеми за 0,2 денари тогаш матрицата $B = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}$ го прикажува зголемувањето на набавната цена и продажната цена на секоја стока. Матрицата

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0,5 & 3+0,5 & 2+0,5 \\ 4+0,2 & 6+0,2 & 7+0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 3,5 & 2,5 \\ 4,2 & 6,2 & 7,2 \end{bmatrix}$$

ги прикажува новите набавни и продажни цени на трите различни стоки во трговското друштво.

Нека $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и k реален број. **Производ** на реалниот број k со матрицата A е матрицата $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ таква што $b_{ij} = ka_{ij}$, за $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, и пишуваме $B = kA$.

Со други зборови, матрица се множи со реален број така што секој нејзин елемент се множи со реалниот број.

Матрицата $(-1)A$ ја означуваме со $-A$, односно $(-1)A = -A$.

Пример 3. Нека $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Најди ги матриците $2A$ и $-3A$.

$$\begin{aligned} \text{Имаме } 2A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ и} \\ -3A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \cdot 1 & (-3) \cdot 4 \\ (-3) \cdot 3 & (-3) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Нека A и B се две $m \times n$ матрици. Ќе дефинираме операција **одземање на матрици** со равенството $A - B = A + (-B)$. Со други зборови, ако $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ тогаш разлика $A - B$ на матрицата A со матрицата B е матрицата $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ така што $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, за $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Да забележиме дека операцијата одземање матрици е дефинирана само за матрици од ист ред.

Пример 4. Ако $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, тогаш

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -21 & 3 & 24 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 5. Со матрицата $A = \begin{bmatrix} 300 & 400 & 200 \\ 700 & 500 & 800 \end{bmatrix}$ е прикажан обемот на

производство во летната и зимската сезона (по редици) на машки, женски и детски чевли (по колони) на една фабрика за чевли во текот на 2009 година. Со

матрицата $B = \begin{bmatrix} 400 & 200 & 500 \\ 600 & 500 & 300 \end{bmatrix}$ се дадени аналогни информации во текот на 2010 година. Тогаш матрицата

$$A - B = \begin{bmatrix} 300 - 400 & 400 - 200 & 200 - 500 \\ 700 - 600 & 500 - 500 & 800 - 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 200 & -200 \\ 100 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

ја дава информацијата за промената во обемот на производство во летната и зимската сезона (по редици) на машки, женски и детски чевли (по колони) на фабриката од едната до другата година. Така, на пример, елементот $a_{11} = -100$ што значи дека производството на машки чевли во летната сезона опаднало за 100 од едната до другата година, додека $a_{22} = 0$ покажува дека немаме промена во производството на женски чевли во зимската сезона од едната до другата година.

Една $m \times n$ матрица се вика **нулта матрица**, ако секој нејзин елемент е еднаков на 0. Вообичаено се означува со O .

Во продолжение ќе искажеме некои својства на дефинираните операции.

Нека A , B и C се $m \times n$ матрици и нека $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Тогаш важи:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + O = O + A = A$
3. $A + (-A) = (-A) + A = O$
4. $A + B = B + A$
5. $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$
6. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
7. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$
8. $1A = A$ и $0A = O$.

Навистина, ако $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ и $C = [c_{ij}]$, тогаш својствата на операции-те собирање и множење реални броеви, за елементот на ij – то место важи:

$$\begin{aligned} a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) &= (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}, & a_{ij} + 0 &= 0 + a_{ij} = a_{ij}, \\ a_{ij} + (-a_{ij}) &= (-a_{ij}) + a_{ij} = 0, & a_{ij} + b_{ij} &= b_{ij} + a_{ij}, \\ k_1(a_{ij} + b_{ij}) &= k_1a_{ij} + k_1b_{ij}, & (k_1 + k_2)a_{ij} &= k_1a_{ij} + k_2a_{ij}, \\ k_1(k_2a_{ij}) &= (k_1k_2)a_{ij}, & 1a_{ij} &= a_{ij} \text{ и } 0a_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Од дефиницијата за еднаквост на две матрици следува дека се точни и соодветните матрични равенства искажани во својството.

Задачи

1. Најди го збирот на матриците $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 12 & 0 & 4 \\ 7 & -9 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 6 & 22 & 0 \\ 12 & -3 & -2 \\ -14 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Најди го производот на бројот 0,5 и матрицата $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Нека се дадени се матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Најди ја матрицата: а) $A + B$; б) $3B + C$; в) $3A - 2B + C$.

4. Најди ги коефициентите x , y , z и t , така што да важи

$$x \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Со матрицата $A = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 80 \\ 50 & 70 & 40 \end{bmatrix}$ е даден бројот на илјади пакувања во фабриката X и фабриката Y (по редици) на три видови млечни производи: јогурт, сирење и павлака во 2021 година. Со матрицата $B = \begin{bmatrix} 70 & 10 & 40 \\ 30 & 50 & 90 \end{bmatrix}$ се дадени аналогни информации во текот на 2022 година. Која информација ја дава матрицата $A - B$?

6. Во табелата се дадени податоци за просечниот век на живот, изразен во години, на белата и црната раса од машката и женската популација, измерен во 1990 година, 2000 година и 2010 година.

	Бела раса		Црна раса	
	Мажи	Жени	Мажи	Жени
1950	56,4	57,6	45,5	45,7
1970	64,4	65,6	55,5	56,2
1990	73,7	76,7	67,2	69,8
2010	75,4	79,5	70,7	74,6

а) Формирај матрица A што ја содржи информацијата за белата раса и матрица B што ја содржи информацијата за црната раса.

б) Со употреба на формираните матрици најди за колку години просечно повеќе белата раса во секоја категорија повеќе живее отколку црната раса.

8.7. Множење на матрици

Слично, како и собирањето на матрици, и производот на две матрици може да даде барана информација врз која ќе се базира некоја деловна одлука.

Ако $A = [a_{ij}]$ е $m \times n$ матрица и $B = [b_{ij}]$ е $n \times p$ матрица, тогаш **производ** AB е матрица $C = [c_{ij}]$ од ред $m \times p$ така што $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$, за $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, p$, и пишуваме $C = AB$.

Со други зборови, елементот c_{ij} на матрицата $C = AB$ е збир на производите на елементите од i -тата редица на матрицата A со соодветните елементи од j -тата колона на матрицата B .

Да забележиме дека производот AB не е дефиниран ако бројот на колони на матрицата A е различен од бројот на редици на матрицата B .

Пример 1. Нека $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Тогаш

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \\ -2 \cdot 2 + 6 \cdot 4 & -2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Од последниот пример може да заклучиме дека

- Множењето на матрици не е комутативно;
- Производ на две ненулти матрици може да биде нулта матрица.

Пример 2. Производите A и B се изработени од пластика, метал и стакло со број на единици од секој репроматеријал даден во следнава табела:

	Пластика	Метал	Стакло
Производ A	3	1	0,5
Производ B	4	0,5	2

Заради транспортните трошоци на две фабрички постројки X и Y единичните цени на секој репроматеријал се различни. Во следната табела се дадени единечните трошоците на секој репроматеријал на двете фабрики:

	Трговска фирма X	Трговска фирма Y
Пластика	10	9
Метал	22	26
Стакло	14	14

Од информациите ги наоѓаме матриците $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0,5 \\ 4 & 0,5 & 2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$

со кои се дадени единиците репроматеријали за секој производ и единечните цени на секој репроматеријал, соодветно. Нивниот производ

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0,5 \\ 4 & 0,5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 22 & 26 \\ 14 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 + 22 + 7 & 27 + 26 + 7 \\ 40 + 11 + 28 & 36 + 13 + 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & 60 \\ 79 & 77 \end{bmatrix}$$

ја дава цената на секој од производите A и B (по редици) во секоја од фабричките постројки X и Y .

За матричниот производ важат следниве својства:

1. Ако $A = [a_{ij}]$ е $m \times p$ матрица, $B = [b_{ij}]$ е $p \times q$ матрица, и $C = [c_{ij}]$ е $q \times n$ матрица, тогаш

$$A(BC) = (AB)C \quad (\text{асоцијативен закон})$$

Заради својствата на операциите собирање и множење реални броеви, за елементот на ij – то место важи

$$\sum_{k=1}^p a_{ik} \sum_{r=1}^q b_{kr} c_{rj} = \sum_{r=1}^q \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kr} c_{rj} = \sum_{r=1}^q \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kr} \right) c_{rj}.$$

Равенството искажано во својството следува од дефиницијата за еднаквост на две матрици.

2. Ако $A = [a_{ij}]$ е $m \times p$ матрица, а $B = [b_{ij}]$ и $C = [c_{ij}]$ се $p \times n$ матрици, тогаш

$$A(B + C) = AB + AC \quad (\text{лев дистрибутивен закон})$$

Заради својствата на операциите собирање и множење реални броеви, за елементот на ij – то место важи

$$\sum_{k=1}^p a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^p (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^p a_{ik}c_{kj}.$$

Равенството следува од дефиницијата за еднаквост на две матрици.

3. Ако $B = [b_{ij}]$ и $C = [c_{ij}]$ се $m \times p$ матрици, а $A = [a_{ij}]$ е $p \times n$ матрица, тогаш

$$(B + C)A = BA + CA \quad (\text{десен дистрибутивен закон})$$

Заради својствата на операциите собирање и множење реални броеви, за елементот на ij – то место важи

$$\sum_{k=1}^p (b_{ik} + c_{ik})a_{kj} = \sum_{k=1}^p (b_{ik}a_{kj} + c_{ik}a_{kj}) = \sum_{k=1}^p b_{ik}a_{kj} + \sum_{k=1}^p c_{ik}a_{kj}.$$

Равенството следува од дефиницијата за еднаквост на две матрици.

4. Ако $A = [a_{ij}]$ е $m \times p$ матрица, а $B = [b_{ij}]$ е $p \times n$ матрица, тогаш

$$k(AB) = (kA)B = A(kB)$$

Заради својствата на операциите собирање и множење реални броеви, за елементот на ij – то место важи

$$k \sum_{r=1}^p a_{ir}b_{rj} = \sum_{r=1}^p (ka_{ir})b_{rj} = \sum_{r=1}^p a_{ir}(kb_{rj}).$$

Равенството следува од дефиницијата за еднаквост на две матрици.

Ако $n \in \mathbb{N}$, означуваме $A^n = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ пати}}.$

Задачи

1. Нека A е $m \times n$ матрица, а B е $n \times m$ матрица. Најди го редот на матриците AB и BA . Дали може $AB = BA$, ако $m \neq n$?

2. Пресметај ги производите:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{bmatrix}; \quad \text{б)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}; \quad \text{г)} A^4, \text{ ако } A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{д)} A^3 - 2A^2 - 9A \text{ ако } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Следнава табела дава информација за количините од производите кои

треба да ги набават два оддели A и B , во една фирма:

	Волна	Свила	Памук
Оддел A	30	20	10
Оддел B	20	10	20

За производите имаат понуди од двајца добавувачи X и Y , чии што единични цени се дадени со следнава табела:

	Добавувач X	Добавувач Y
Волна	10	9
Свила	22	26
Памук	14	14

Најди ја матрицата која дава информации за цената на трите количества производи кои треба да ги набават одделите A и B од добавувачите X и Y .

8.8. Инверзна матрица

Поим за инверзна матрица

Квадратна матрица од ред n се нарекува матрица од ред $n \times n$.

Пример 1. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ е квадратна матрица од ред 2.

Матрицата $B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 11 & -3 \end{bmatrix}$ е квадратна матрица од ред 3.

Една квадратна матрица A се нарекува **инверзibilна**, ако постои матрица B од ист ред како A , така што да важи

$$AB = BA = I.$$

Матрицата B , ако постои, е единствена, бидејќи од $AB_1 = B_1A = I$ и $AB_2 = B_2A = I$ следува дека $B_1 = B_1I = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = IB_2 = B_2$.

Матрицата B ќе ја нарекуваме **инверзна** на A и ќе ја означуваме со A^{-1} .

Пример 2. Од $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, следува дека

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Нека A и B се инверзibilни квадратни матрици од ред n . Тогаш важи:

1. $(A^{-1})^{-1} = A.$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

Навистина, имаме дека

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I \quad \text{и} \\ (B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}IB = I.$$

Пресметување на инверзна матрица

Нека е дадена квадратна матрица $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ од ред 2. За да ја најдеме матрицата A^{-1} (ако постои), треба да го решиме системот

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} ay + bt = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}.$$

Од овде се добива $x = \frac{d}{\det A}$, $y = \frac{-b}{\det A}$, $z = \frac{-c}{\det A}$, $t = \frac{a}{\det A}$, ако $\det A = ad - bc \neq 0$.

Значи ако $\det A \neq 0$, тогаш дадената матрица е инверзибилна и нејзината инверзна матрица е

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Да ја најдеме инверзната матрица на квадратната матрица $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ од ред 2.

Имаме дека $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$. Инверзната матрица

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Забележуваме дека добиената матрица A^{-1} , при $\det A \neq 0$, го исполнува условот $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Според тоа, при $\det A \neq 0$ матрицата A е инверзибилна и A^{-1} е бараната инверзна матрица.

Во продолжение, ќе изведеме формула за наоѓање на инверзната матрица на произволна инверзибилна 3×3 матрица. Нека е дадена матрицата

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

За секој од елементите a_{ij} , $i, j \in \{1, 2, 3\}$, постои соодветниот алгебарски комплемент A_{ij} . Имено, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, каде што Δ_{ij} е минорот што одговара на елементот a_{ij} . Транспонираната матрица од матрицата составена од алгебарските

комплемента се нарекува **адјунгирана матрица** за A и се означува со $\text{adj}A$.
Значи, по дефиниција имаме

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

За матрица A чијашто детерминанта не е нула, односно $\det A \neq 0$, и адјунгираната матрица за A важи

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A \right) = \left(\frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A \right) \cdot A = I$$

од каде што следува дека инверзната матрица на матрицата A е матрицата

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A.$$

Пример 4. Да ја најдеме инверзната матрица на квадратната матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ од ред 3.}$$

Наоѓаме дека

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0.$$

За да ја најдеме инверзната матрица $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$ на матрицата A пресметуваме

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \end{aligned}$$

од каде што наоѓаме дека

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задачи

1. Доколку следните матрици се инверзбилни,

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{б)} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}; \quad \text{в)} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}; \quad \text{г)} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 25 \end{bmatrix};$$

најди ги нивните инверзни матрици.

2. Доколку следните матрици се инверзбилни,

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix};$$

најди ги нивните инверзни матрици.

3. Најди ги инверзните матрици на матриците:

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{б)} \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

4. Нека $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е дијагонална матрица, каде $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$. Најди ја инверзната матрица на матрицата D .

8.9. Матрични равенки

Матрични равенки се нарекуваат равенките кај кои непознатата е матрица. Нивното решавање најчесто е постапка која се состои од два дела. Во првиот дел треба да ја решиме матричната равенка, односно да ја изразиме непознатата матрица X , а во вториот дел ја наоѓаме X со помош на операции на матрици и равенство на матрици.

Ќе разгледаме неколку видови матрични равенки.

1. Матричната равенка од облик

$$AX = B$$

кадешто A е инверзибилна матрица од ред n , B е матрица од ред $n \times m$, а X е непознатата матрица од ред $n \times m$.

Двете страни од матричната равенка од лево ги множиме со инверзната матрица A^{-1} на матрицата A . Тогаш имаме

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

од каде што со примена на асоцијативниот закон добиваме дека

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Бидејќи $A^{-1}A = I_n$ и $I_n X = X$, имаме дека

$$X = A^{-1}B$$

е решението на дадената матрична равенка.

Пример 1. Да ја решиме матричната равенка

$$AX = B, \text{ каде што } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Бидејќи $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 1 - 0 = 1 \neq 0$, решението на матричната ра-

венка гласи

$$X = A^{-1}B.$$

За да ја најдеме инверзната матрица $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$ на матрицата A пресметуваме

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \end{aligned}$$

од каде што наоѓаме дека

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогаш имаме дека

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Матричната равенка од облик

$$XA = B$$

каде што A е инверзибилна матрица од ред m , B е матрица од ред $n \times m$, а X е непознатата матрица од ред $n \times m$.

Двете страни од матричната равенка ги множиме од десно со инверзната матрица A^{-1} на матрицата A . Тогаш имаме

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1}$$

од каде што со примена на асоцијативниот закон добиваме дека

$$X(AA^{-1}) = BA^{-1}.$$

Бидејќи $AA^{-1} = I_m$ и $XI_m = X$, имаме дека $X = BA^{-1}$ е решението на дадената матрична равенка.

Пример 2. Да ја решиме матричната равенка

$$XA = B, \text{ каде што } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Бидејќи $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0$, решението на матричната

равенка може да се запише во облик

$$X = A^{-1}B.$$

За да ја најдеме инверзната матрица $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$ на матрицата A пресметуваме

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -2, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

од каде што наоѓаме дека

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогаш имаме дека

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Матричната равенка од облик

$$AXB = C$$

каде што A е инверзибилна матрица од ред n , B е инверзибилна матрица од ред m , C е матрица од ред $n \times m$, а X е непознатата матрица.

Множејќи со инверзната матрица A^{-1} на матрицата A од лево, а потоа со инверзната матрица B^{-1} на матрицата B од десно, го добиваме решението

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Пример 3. Да ја решиме ја матричната равенка $AXB = C$ каде

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 9 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ -5 & -2 & 7 \end{bmatrix} \text{ и } C = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 10 \\ 5 & -9 & -1 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Матриците A и B се инверзибилни, затоа што $\det A = 28$ и $\det B = 78$. Притоа

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{14} & \frac{53}{28} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{3}{14} & -\frac{11}{28} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \text{ и } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{26} & -\frac{5}{13} & -\frac{9}{26} \\ \frac{23}{78} & -\frac{8}{39} & -\frac{17}{78} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

На крај имаме $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1247}{728} & -\frac{1433}{182} & -\frac{3123}{728} \\ -\frac{212}{273} & -\frac{173}{273} & -\frac{79}{273} \\ \frac{619}{2184} & \frac{925}{546} & \frac{1991}{2184} \end{pmatrix}$.

Да напоменеме дека во сите случаи решението на матричната равенка е единствено.

Пример 4. Ако $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, тогаш матричната равенка

$(A - 2I)X = A + I$ ја решаваме на следниов начин:

множиме со $A - 2I$ одлево и добиваме $(A - 2I)^{-1}(A - 2I)X = (A - 2I)^{-1}(A + I)$, т.е.

$X = (A - 2I)^{-1}(A + I)$. Понатаму,

$$B = A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det B = 2 + 4 - 2 + 2 = 6$$

$$B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = A + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Конечно,

$$X = B^{-1}C = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Задачи

1. Реши ја матричната равенка $AX = B$, ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. За $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ реши ја равенката $X(I - B) = A$.

3. Ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, реши ја равенката

та $(A - I)^{-1}XB^{-1} = C^{-1}$.

4. Реши ја матричната равенка $AX - 2X = B$, ако

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. Реши ја матричната равенка $AX = X + A$, ако $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

6. Реши ја матричната равенка $AX - B = BX + I$, ако

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8.10. Матрична презентација на систем од три линеарни равенки со три непознати

Системот од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

еднозначно е определен со матричната равенка

$$AX = B$$

наречена **матрична презентација** каде што

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

согласно со познатите операции множење на матрици и равенство на матрици. Квадратната 3×3 матрицата A се нарекува **матрица на системот**, 3×1 матрицата X - матрица на непознатите и 3×1 матрицата B - матрица на слободните членови.

Пример 1. Системот од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$$

еднозначно е определен со матричната равенка

$$AX = B$$

каде што

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ и } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ако матрицата A има инверзна матрица A^{-1} , тогаш со множење од десно на двете страни на матричната равенка на системот со A^{-1} добиваме

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

од каде што со примена на асоцијативниот закон добиваме дека

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Бидејќи $A^{-1}A = I_3$ и $I_3X = X$, имаме дека

$$X = A^{-1}B.$$

Имајќи во вид дека $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ конечно добиваме дека

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

од каде што согласно со познатите операции множење на матрици и равенство на матрици наоѓаме дека решенијата на системот се

$$x_1 = \frac{1}{\det A} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{\det A} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{\det A} (A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3).$$

Пример 2. Матричната презентација на системот $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$ гласи

$$AX = B$$

каде што

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Да ја најдеме инерзната матрица A^{-1} на матрицата A . Имаме дека

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 3 - 6 - 3 = -4, \text{ и}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

од каде што наоѓаме дека

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогаш имаме дека

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

од каде што согласно со познатите операции множење на матрици и равенство на матрици наоѓаме дека решенијата на системот се

$$x = \frac{1}{\det A} (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3) = -\frac{1}{4}(-3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)) = 1$$

$$y = \frac{1}{\det A} (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3) = -\frac{1}{4}(-1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)) = 0$$

$$z = \frac{1}{\det A} (A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3) = -\frac{1}{4}(3 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)) = -1.$$

Пример 3. Ресторант приготвува овошен десерт по три различни рецепти R_1 , R_2 и R_3 и притоа користи три видови на овошје O_1 , O_2 и O_3 . Податоците за количеството овошје изразено во грамови за приготвување на еден овошен десерт се дадени во табелата подолу. Познати се количествата од секој вид овошје, изразени во грамови, што ги има на располагање ресторантот. Колку овошни десерти од секој рецепт R_1 , R_2 и R_3 треба да се приготват за да се искористи во целост овошјето што го има на располагање ресторантот?

Вид овошје	R_1	R_2	R_3	Количество
O_1	40	30	40	3400
O_2	10	20	30	1600
O_3	20	30	50	4200

Да го најдеме систем линеарни равенки со кој може да се моделира проблемот. Да го означиме со x , y и z , бројот на овошни десерти приготвени по рецептите R_1 , R_2 и R_3 , соодветно. Го поставуваме системот равенки

$$\begin{cases} 40x + 30y + 40z = 5800 \\ 10x + 20y + 30z = 2600 \\ 20x + 30y + 50z = 4400 \end{cases}$$

кој е еквивалентен на системот

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 580 \\ x + 2y + 3z = 260 \\ 2x + 3y + 5z = 440 \end{cases}$$

чијашто матричната презентација гласи $AX = B$ каде што

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 340 \\ 160 \\ 420 \end{bmatrix}.$$

Инверзната матрица $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 12 & -8 \\ -1 & -6 & 15 \end{bmatrix}$. Тогаш $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 12 & -8 \\ -1 & -6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 20 \end{bmatrix}$.

од каде што наоѓаме дека решенијата на системот се $x=80$, $y=60$ и $z=20$. Според тоа, треба да се приготват 80, 60 и 20 овошни десерти од рецептите R_1 , R_2 и R_3 , соодветно.

Задачи

1. Запиши ја матричната презентација на системите линеарни равенки:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x-3y+4z=1 \\ x-3z=-1 \\ -5y+3z=0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x+y-z=-3 \\ -2x-10z=2 \\ 4x-3y=z \end{cases}$$

2. Реши ги следните системи линеарни равенки:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x-3y+4z=14 \\ -x+2y-5z=-13 \\ 2x+5y-3z=-5 \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} x-y+3z=20 \\ -3x+4y+2z=-7 \\ -x+2y+z=-2 \end{cases} \\ \text{в) } & \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-2y+2z=3 \end{cases} & \text{г) } & \begin{cases} x+2y-5z=6 \\ -2x+y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=8 \end{cases} \end{aligned}$$

3. За производство на три различни производи P_1 , P_2 и P_3 се користат три врсти на машини M_1 , M_2 и M_3 . Податоците за времето изразени во часови за изработка на единица од секој производ се дадени во табелата подолу. Познати се капацитетите на секоја машина изразени во часови. Колку парчиња од секој производ P_1 , P_2 и P_3 треба да се произведат за да се искористи во целост капацитетот на машините?

Машина	P_1	P_2	P_3	Капацитет
M_1	5	2	1	280
M_2	3	4	2	350
M_3	4	3	5	490

- а) Најди го математичкиот модел преку систем линеарни равенки.
 б) Реши го системот равенки.
 в) Коментирај го добиениот резултат.

4. Три семејства прават салата за летен пикник. Првиот користи три килограми краставици, пет килограми домати еден килограм кромид по цена од 230 денари. Вториот користи три килограми краставици, два килограми домати и два килограми кромид по цена од 210 денар. Последниот сосед користи четири

килограми краставици, три килограми домати и три килограми кромид по цена од 300 денари. Колкава е цената на секој зеленчук?

8.11. Гаусов метод на елиминација

За нумеричко решавање на систем линеарни равенки со две непознати, познати се **методот на спротивни коефициенти** и **методот на замена**. И двата метода може да се применат и за системи линеарни равенки со три непознати, но практиката покажала дека во тој случај најефикасно е да се користи метод кој е комбинација на овие два метода, и се вика **Гаусов метод на елиминација**.

Нека е даден систем од три линеарни равенки со три непознати:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

- Може да претпоставиме дека $a_{11} \neq 0$, бидејќи во спротивно, првата равенка може да си го замени местото со втората или со третата така што коефициентот пред x да биде ненулта. Ако сите коефициенти пред x се еднакви на нула, тогаш би имале систем со две непознати.

- Првата равенка помножена со $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ја додаваме на втората равенка, а потоа помножена со $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ја додаваме на третата равенка. Тогаш коефициентите пред x во втората и во третата равенка стануваат нула, односно добиваме еквивалентен систем од облик

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ a'_{32}y + a'_{33}z = b'_3 \end{cases}$$

- Ако $a'_{22} \neq 0$, тогаш втората равенка помножена со $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$ ја додаваме на третата равенка. Со тоа добиваме еквивалентен систем на погорниот, но и на почетниот, од облик

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 \\ a''_{33}z = b''_3 \end{cases} \quad (2a)$$

Ако $a'_{22} = 0$, но $a'_{32} \neq 0$, тогаш втората и третата равенка си ги менуваат своите места, па повторно можеме системот да го доведеме до обликот (2a).

Ако пак, $a'_{22} = a'_{32} = 0$, тогаш го имаме системот

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{23}z = b'_2 \\ a''_{33}z = b''_3 \end{cases}$$

па гледаме кој од коефициентите a'_{23} и a'_{33} е различен од нула. Ако на пример, $a'_{23} \neq 0$, втората равенка помножена со соодветен коефициент ја додаваме на

третата равенка и притоа добиваме еквивалентен систем од облик

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a'_{23}z = b'_2 \\ 0z = b'''_3 \end{cases} \quad (2б)$$

Ако пак $a'_{22} = a'_{23} = a'_{32} = a'_{33} = 0$, тогаш го имаме еквивалентниот систем

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ 0z = b'_2 \\ 0z = b'''_3 \end{cases} \quad (2в)$$

Во секој случај, системот (1) е еквивалентен со еден од системите (2а), (2б) и (2в).

• Решение на системот (2а):

Случај 1. Ако $a'''_{33} \neq 0$, тогаш од третата равенка еднозначно се определува z , а потоа така добиената вредност на z се заменува во втората равенка. Бидејќи $a'_{22} \neq 0$, y еднозначно се определува од втората равенка, па така најдените y и z се заменуваат во првата равенка. Бидејќи $a'_{11} \neq 0$, и x се определува еднозначно. Значи, системот (1) има единствено решение.

Случај 2. Ако $a'''_{33} = 0$, но $b'''_3 \neq 0$, системот (2) е противречен.

Случај 3. Ако $a'''_{33} = b'''_3 = 0$, последната равенка на системот (2а) е излишна и ја отфрламе бидејќи се сведува на $0 = 0$. Земајќи потоа произволна вредност t за z во втората равенка, добиваме еднозначно решение за y бидејќи $a'_{22} \neq 0$, $y = \frac{b'_2 - a'_{23}t}{a'_{22}} = u$. Потоа се враќаме на првата равенка од која се добива еднозначно $x = \frac{b_1 - a_{12}u - a_{13}t}{a_{11}}$; бидејќи $a_{11} \neq 0$. Значи, во овој случај системот

(1) има бескрајно многу решенија.

• Решение на системот (2б):

Случај 1. Ако $b'''_3 \neq 0$, тогаш системот е противречен.

Случај 2. Ако $b'''_3 = 0$, тогаш третата равенка ја отфрламе како излишна, од втората добиваме $z = \frac{b'_2}{a'_{23}} = z_0$ и избирајќи за y произволна вредност t од прва-

та равенка наоѓаме еднозначно решение за x , $x = \frac{b_1 - a_{12}t - a_{13}z_0}{a_{11}}$.

• Решение на системот (2в):

Случај 1. Ако $b'_2 \neq 0$ или $b'''_3 \neq 0$, тогаш системот е противречен.

Случај 2. Ако $b'_2 = b'''_3 = 0$, тогаш втората и третата равенка се излишни. Во првата равенка земаме произволни вредности t и u за y и z , соодветно, а потоа x се определува еднозначно бидејќи $a_{11} \neq 0$, $x = \frac{b_1 - a_{12}t - a_{13}u}{a_{11}}$.

Не е тешко да се насети дека погорниот тек на одвивање на пресметувањата (алгоритам) на Гаусовиот метод не е единствен. Изборот на алгоритмот често го вршме користејќи ја спецификата на системот.

Пример 1. За да се реши системот
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$
 забележуваме дека тој е еквивалентен со
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$
. Множејќи ја првата равенка со -2 и додавајќи ја на втората, се добива еквивалентниот систем
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \\ 3y + z = -1 \end{cases}$$
. Множејќи ја втората равенка со -3 и додавајќи ја на третата се добива еквивалентниот систем
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \\ 4z = -4 \end{cases}$$
. Од последниот систем добиваме $z = -1$, $y = 0$, $x = 1$.

Натаму, со R_i ќе ја означуваме i -тата равенка на системот, за $i = 1, 2, 3$. Множењето на равенка со бројот k ќе го означуваме со kR_i . Множењето на i -тата равенка со k и додавањето на j -тата ќе го означуваме со $kR_i + R_j$, а промена на местата на i -тата и j -тата равенка со $R_i \leftrightarrow R_j$.

Пример 2. Решавањето на системот
$$\begin{cases} y + 2z = -1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y + 5z = 4 \end{cases}$$
 се одвива како што следува:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ x + y + 5z = 4 \end{cases} \xrightarrow{-R_1 + R_3} \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ 2y + 4z = 2 \end{cases} \xrightarrow{-2R_2 + R_3} \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y + 2z = -1 \\ 0y + 0z = 4 \end{cases}$$

Третата равенка во последниот систем е противречна и затоа системот е противречен.

Пример 3. За системот
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + 3y + 9z = 12 \end{cases}$$
 со примена на Гаусовиот метод добиваме еквивалентни системи

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ -2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + 3y + 9z = 12 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{smallmatrix}} \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 8z = 8 \\ 3z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 8z = 8 \\ 8z = 8 \end{cases}$$

Од последната равенка на последниот систем добиваме $z = 1$. Потоа, избирајќи произволна вредност $y = t$ за x добиваме $x = 1 - t$. Значи, системот има бескрајно многу решенија: $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 1$, за секој реален број t .

Гаусовиот метод може да се употреби и за решавање на систем во матрична презентација.

Нека е даден системот
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$
. Матрицата

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

се вика **проширена матрица на системот**. На оваа матрица се вршат трансформациите опишани претходно, од методот на Гаус. Така, таа матрица се доведува до скалеста и од таму се наоѓаат решенијата на системот.

Пример 4. За системот
$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 5 \\ 6x + 3y + 3z = 10 \end{cases}$$
 проширената матрица на систе-

мот е $A_{\Pi} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 10 \end{bmatrix}$. Со трансформации на таа матрица добиваме

$$A_{\Pi} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}R_2 \\ -\frac{1}{2}R_3}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ова значи дека втората равенка (т.е. втората редица на матрицата) на системот е $0x + 0y + 0z = 1$, па системот нема решение.

Пример 5. Проширената матрица на системот
$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$
 ја

трансформираме и добиваме

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сега, од последната редица имаме $-6z = 1$, па $z = -\frac{1}{6}$. Од втората редица добиваме

$-y + 3z = -1$, т.е. $y = \frac{1}{2}$. И од првата редица добиваме $x + 2y - z = 5$, т.е.

$$x = \frac{23}{6}.$$

Методот на Гаус се користи и за наоѓање на инверзна матрица, познат како **Гаусов алгоритам за инверзна матрица**.

Тој се состои во следново: матрицата A се проширува со единечната од соодветниот ред, т.е се формира матрицата $[A | I]$. Потоа на таа матрица се вршат трансформациите опишани погоре. Доколку матрицата A е несингуларна, со овие трансформации ќе се добие еквивалентна матрица $[I | A^{-1}]$.

Пример 6. Наоѓање на матрицата A^{-1} за $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
 [A | I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2R_1+R_2 \\ -4R_1+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\substack{2R_3+R_1 \\ -R_3+R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{(-1)R_2 \\ (-1)R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\substack{(-1)R_2 \\ (-1)R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right] = [I | A^{-1}].
 \end{aligned}$$

Оттука, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Задачи

Со помош на Гаусовиот метод и со матрична презентација реши ги следните системи:

$$\begin{array}{lll}
 1. \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4. \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases} & 2. \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 7y + 4z = 3. \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases} & 3. \begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3 \\ 3x - 3y + 2z = 1. \\ 4x - 5y + 2z = 1 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 4. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = -4 \\ 6x - 2y + 3z = -1, \\ 5x - 3y + 2z = -3 \end{cases} & 5. \begin{cases} 5x + 2y + 3z = -2 \\ 3x + 4y + 2z = -10. \\ 2x - 2y + 5z = 1 \end{cases} & 6. \begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ x + 2y - 3z = -6. \\ 4x - 5y - 2z = 12 \end{cases}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 7. \begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8. \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases} & 8. \begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x - z = 11. \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}
 \end{array}$$

9. Со методот на Гаус, најди ја инверзната матрица на

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}; & \text{б)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}; & \text{в)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Пресметај ја вредноста на детерминантата:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$$

2. Докажи дека равенката $\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} = 0$, каде што a, b и c се реални броеви, има реални корени.

3. Докажи го равенството $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 + a^2 \\ 1 & a^2 & a^3 + a \\ 1 & a^3 & a^2 + a \end{vmatrix} = 0$.

4. Докажи го идентитетот $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_1+x_2) & \frac{1}{2}(y_1+y_2) & 1 \\ \frac{1}{2}(x_1-x_2) & \frac{1}{2}(y_1-y_2) & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$

5. Со примена на својствата на детерминанта пресметај $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s+1 & s+2 & s+3 \\ s+4 & s+5 & s+7 \end{vmatrix}.$

6. Реши ја неравенката $\begin{vmatrix} 2 & -1 & x+2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & x & -3 \end{vmatrix} < 0$.

7. За која вредност на a , системот $\begin{cases} 3x+5y=5 \\ 2x-y=a \\ x+2y=1 \end{cases}$ има решение?

8. Реши ги следните системи равенки со три непознати:

$$\text{а) } \begin{cases} x+y-z=a \\ x-y+z=b \\ -x+y+z=c \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases}.$$

9. Реши го системот равенки: $\begin{cases} x+ay+z=a \\ ax+y+z=1 \\ x+y+az=a^2 \end{cases}.$

10. Во кој случај системот равенки $\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \\ ax-by=ab \end{cases}$ има решение?

20. Фабрика текстил изработува три модели на кошули кои ги извезува во три држави. Во првата држава извезува 500, 100 и 600 кошули од секој модел, соодветно, во втората држава извезува 300, 700 и 400 кошули од секој модел, соодветно, и во третата држава извезува 200, 400 и 800 кошули од секој модел, соодветно. Запиши ги податоците со помош на матрица.

21. Матрицата $A = \begin{bmatrix} 100 & 400 & 200 \\ 500 & 500 & 800 \end{bmatrix}$ ја прикажува потрошувачката на електрична енергија во киловат часови на семејството A за месеците март, април и мај во 2021 и 2022 година. Матрицата $B = \begin{bmatrix} 400 & 200 & 500 \\ 600 & 100 & 300 \end{bmatrix}$ дава аналогни информации за семејството B . Со помош на разликата на матрицата A со матрицата B , спореди ја потрошувачката на двете семејства.

22. Во табелата е дадено количеството на репроматеријали во тони кои треба да ги набават две фабрики A и B :

	Железна руда	Кокс	Варовник
Фабрика A	40	20	50
Фабрика B	20	30	10

За репроматеријалите имаат понуди од двајца добавувачи X и Y , чиешто единични цени се дадени со следнава табела:

	Добавувач X	Добавувач Y
Железна руда	12	8
Кокс	28	32
Варовник	16	11

Најди ја матрицата која дава информации за цената на трите количества репроматеријали кои треба да ги набават фабриците A и B од добавувачите X и Y .

23. Ана, Јован и Арта купиле бои, четки и платно. Во табелата се дадени бројот на купени производи и сумите во евра што секој од нив ги платил за производите. Пресметај ја цената на секој единечен производ.

	Бои	Четки	Платно
Ана	3	4	5
Јован	2	5	7
Арта	4	3	6

24. Цвеќарница прави 5 идентични букети за деверуша за свадба. Таа планира да потроши 6100 денари и сака секој букет да има 24 цвеќиња. Розите чинат по 60 денари, лалињата чинат по 40 денари, а герберите чинат по 30 денари. Освен тоа сака да има двојно повеќе рози од другите два вида цветови комбинирани во секој букет. Колку рози, лалиња и гербери има во секој букет?

9. ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА

9.1. Реална функција

Поим за функција

Во секојдневниот живот се користат различни величини, должина, плоштина, маса, волумен, температура, време итн. Тие се јавуваат во секој природен процес, зависат една од друга и се менуваат во зависност од менувањето на некоја друга величина.

Пример 1. а) Знаеме дека плоштината на квадрат со страна a се пресметува по формулата $P = a^2$. Забележуваме дека со зголемување на должината на страната се зголемува и плоштината на квадратот, а со намалување на должината на страната се намалува и плоштината на квадратот. Така, плоштината на квадратот зависи од должината на страната.

б) Од физика е познато дека должината на патот S при слободно паѓање се пресметува со формулата $S = \frac{gt^2}{2}$, каде што g е Земјиното забрзување. Според тоа, должината на изминатиот пат зависи од времето за кое што телото паѓа надолу.

Од погорниот пример заклучуваме дека имаме две множества од променливи величини и правило за придружување според коешто со менувањето на величините во едното множество се менуваат величините во другото множество.

Нека $\mathbb{R}$ е множеството реални броеви и нека $D \subseteq \mathbb{R}$. Ако на секој елемент $x \in D$ според однапред утврдено правило му се придружува точно определен елемент y од $\mathbb{R}$, тогаш се вели дека е определена **реална функција** од D во $\mathbb{R}$, и пишуваме $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Функциите ги означуваме со мали латинични букви, на пример $f, g, h, \dots$

На елементот $x \in D$ функцијата f му придружува реален број $f(x)$, наречен **вредност на функцијата** f во точката x . Елементот $x \in D$ се нарекува **независно променлива вредност**, а елементот $f(x)$ го нарекуваме **зависно променлива вредност**.

Множеството D се нарекува **дефинициона област** на функцијата f и се означува со D_f . Множеството од сите вредности на функцијата f се нарекува **множество вредности** на f и се означува со V_f . Значи

$$V_f = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

Пример 2. а) За функцијата $f(x) = x^2$ имаме дека $f(0) = 0^2 = 0$, што значи вредноста на функцијата во точката $x = 0$ е $f(0) = 0$.

Функцијата е дефинирана за секој $x \in \mathbb{R}$. Значи, имаме дека дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$, и множеството вредности е $R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

б) Функцијата $f(x) = \frac{1}{x}$ е дефинирана функција за секој $x \in \mathbb{R}$ освен за $x = 0$. Значи, дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и множеството вредности е $R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

в) Функцијата $g(x) = \sqrt{x}$ е дефинирана само за оние $x \in \mathbb{R}$ за кои $x \geq 0$. Значи, дефиниционата област е $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty)$, и множеството вредности е $V_g = [0, +\infty)$.

Пример 3. Да ја најдеме дефиниционата област на секоја од следните функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} f(x) = x^2 - 3x - 4 & \text{б)} f(x) = \frac{x^7 - 5}{x^2 + 4x + 3} & \text{в)} f(x) = \sqrt{4 - 5x} \\ \text{г)} f(x) = \log_2(4x - 1) & \text{д)} f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x - 1}. \end{array}$$

а) Имаме дека $D_f = \mathbb{R}$.

б) Потребно е $x^2 + 4x + 3 \neq 0$, односно $(x + 3)(x + 1) \neq 0$ што значи дека $x \neq -3$ и $x \neq -1$. Затоа $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, +\infty)$

в) Потребно е $4 - 5x \geq 0$, односно $x \leq \frac{4}{5}$. Значи $D_f = \left(-\infty, \frac{4}{5}\right]$.

г) Потребно е $4x - 1 > 0$, односно $x > \frac{1}{4}$. Значи $D_f = \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

д) Бидејќи се работи за трети (непарен) корен имаме дека $D_f = \mathbb{R}$.

За функциите f и g велиме дека се **еднакви**, и пишуваме $f = g$, ако и само ако се исполнети следните услови:

- $D_f = D_g$, односно f и g имаат исти дефинициони области,
- $f(x) = g(x)$ за секој $x \in D_f = D_g$, односно f и g имаат исто дејство.

Пример 4. а) Функциите $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирани со

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1}, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = x + 1, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}$$

се еднакви, бидејќи $D_f = D_g = \mathbb{R}$, и

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x + 1)(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x + 1 = g(x), \text{ за секој } x \in \mathbb{R}.$$

б) Функциите $f(x) = \frac{x}{x}$, $x \in \mathbb{R}$ и $g(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ не се еднакви, бидејќи имаат различни дефинициони области $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а $D_g = \mathbb{R}$.

График на функција

Дефиниција 1. График на функција $f(x)$ со дефинициона област D_f е множеството од подредени двојки

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}.$$

Точката $M(x, f(x))$ припаѓа на графикот на функцијата, x е прва координата, а $f(x)$ втора координата на точката M .

Монотоност на функција

За функција $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ велиме дека

- **монотono расте** на множеството $D_1 \subseteq D$, ако (цртеж 2а)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2), \text{ за секои } x_1, x_2 \in D_1$$

- **строго монотono расте** на множеството $D_1 \subseteq D$, ако

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \text{ за секои } x_1, x_2 \in D_1$$

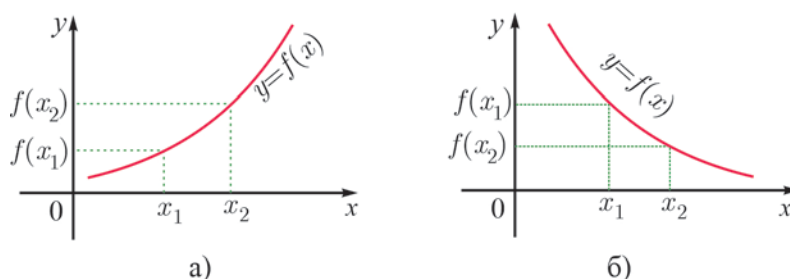
- **монотono опаѓа** на множеството $D_1 \subseteq D$, ако (цртеж 2б)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \text{ за секои } x_1, x_2 \in D_1$$

- **строго монотono опаѓа** на множеството $D_1 \subseteq D$, ако

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \text{ за секои } x_1, x_2 \in D_1$$

Функција која расте или опаѓа се вика **монотона функција**. Функцијата е **строго монотона** на множество D_1 ако е строго растечка или строго опаѓачка.



Цртеж 2

Пример 5. а) Да ја испитаме монотоноста на функцијата $f(x) = 2x - 1$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Нека $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ и нека $x_1 < x_2$. Имаме

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 - 1 - (2x_2 - 1) = 2(x_1 - x_2) < 0$$

односно $f(x_1) < f(x_2)$. Според тоа, функцијата строго монотono расте на целата дефинициона област, односно на целата реална права.

б) Да ја испитаме монотоноста на функцијата $f(x) = 1 - x^3$, дефинирана за секој $x \in \mathbb{R}$. Нека $x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$ и нека $x_1 < x_2$. Имаме

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 1 - x_1^3 - (1 - x_2^3) = -x_1^3 + x_2^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \\ &= (x_2 - x_1) \left(\left(x_1 + \frac{x_2}{2} \right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} \right) > 0 \end{aligned}$$

односно $f(x_1) > f(x_2)$. Според тоа, функцијата строго монотонно опаѓа на целата дефинициона област, односно на целата реална права.

в) Да ја испитаеме монотоноста на функцијата $f(x) = x^2$, дефинирана за секој $x \in \mathbb{R}$. Нека $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ и нека $x_1 < x_2$. Имаме

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$$

односно $f(x_1) > f(x_2)$, што значи функцијата строго монотонно опаѓа на интервалот $(-\infty, 0]$. Нека $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ и нека $x_1 < x_2$. Имаме

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$$

односно $f(x_1) < f(x_2)$, што значи функцијата строго монотонно расте на интервалот $[0, +\infty)$.

Нули на функција

Нула на функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ се нарекува реален број $x \in D_f$ за којшто важи $f(x) = 0$.

Од дефиницијата на нула на функција непосредно следува дека графикот на функцијата ја сече x -оската во точките чиито апсциси се нулите на функцијата f .

Пример 6. Да ги најдеме нулите на следните функции:

а) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

б) $f(x) = e^{5x}$

а) Дадената функција е определена во множеството реални броеви, значи $D_f = \mathbb{R}$. Нулите на функцијата се корените на равенката $f(x) = 0$, односно корените на квадратната равенка $3x^2 - 5x + 2 = 0$, $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

б) Бидејќи $D_f = \mathbb{R}$ и $f(x) = e^{5x} > 0$ следува дека функцијата нема нули.

Операции со функции

Нека се дадени функциите $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : D \rightarrow \mathbb{R}$

1. Збир на функциите f и g е функцијата $(f + g) : D \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирана со

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ за секој } x \in D$$

2. Производ на функциите f и g е функцијата $(fg) : D \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирана со

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \text{ за секој } x \in D$$

3. Количник на функциите f и g каде што $g(x) \neq 0$, за секој $x \in D$ е функцијата $\left(\frac{f}{g}\right) : D \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирана со

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ за секој } x \in D, g(x) \neq 0.$$

Пример 7. Нека функциите $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ се дефинирани со $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = 2x$. Нивниот збир, производ и количник се функциите

$$(f + g)(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}$$

$$(fg)(x) = 2x(x^2 + 1), \text{ за секој } x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}, \text{ за секој } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Задачи

1. За функцијата $f(x) = x^4 - 2x + 4$, најди ги вредностите:

а) $f(-1)$; **б)** $f(0)$; **в)** $f(2)$.

2. Определи дали се еднакви функциите $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, ако:

а) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $D_f = [0, \infty)$, $g(x) = x$, $D_g = [0, \infty)$;

б) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = x$, $D_g = \mathbb{R}$.

3. Определи ги дефиниционите области на следниве функции:

а) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 8}$; **б)** $f(x) = \sqrt{x + 1}$; **в)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

4. Определи ги дефиниционите области на следниве функции:

а) $f(x) = \sqrt{3^{x+1}}$; **б)** $f(x) = \frac{x-2}{e^{1/x}}$; **в)** $f(x) = \sqrt{2 - 2^x}$;

г) $f(x) = \log x^2$; **д)** $f(x) = \log(3x + 4)$; **е)** $f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)}$.

5. Докажи дека следниве функции монотонно растат:

а) $f(x) = x + 3$; **б)** $f(x) = x^3 - 1$;

в) $f(x) = \ln(x - 1)$; **г)** $f(x) = e^{x+1}$.

6. Докажи дека следниве функции монотонно опаѓаат:

а) $f(x) = 1 - 2x$; **б)** $f(x) = 1 - x^3$;

в) $f(x) = -\ln(x + 3)$; **г)** $f(x) = 3^{-x}$.

7. Најди ги нулите на следните функции:

а) $f(x) = x^2 + 2x + 1$; **б)** $f(x) = \ln(1 - 2x)$; **в)** $f(x) = 3^{x+3}$.

8. Најди го збирот, производот и количникот на функциите $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирани со $f(x) = x^3$ и $g(x) = x + 1$.

9.2. Линеарна функција

Функција од облик

$$f(x) = ax + b$$

каде што a и b се реални броеви, наречени коефициенти, а x е независна променлива се вика **линеарна функција**.

Дефиниционата област на линеарната функција $f(x) = ax + b$ е целото множество реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$.

Ако $a \neq 0$, тогаш за множеството вредности V_f имаме $V_f = \mathbb{R}$. Ако $a = 0$, тогаш линеарната функција се нарекува **константна функција** и во тој случај множеството вредности $V_f = \{b\}$ е едноелементно множество.

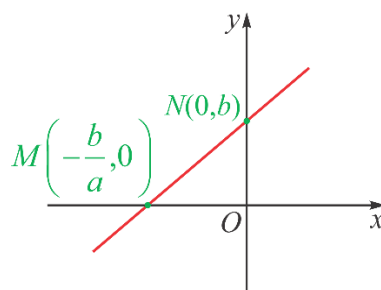
Пример 1. Функцијата $f(x) = x + 1$ е линеарна со параметри $a = 1$ и $b = 1$, дефинициона област $D_f = \mathbb{R}$ и $V_f = \mathbb{R}$.

Нула на линеарната функција $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ е коренот x_0 на соодветната линеарна равенка $ax + b = 0$, односно $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Пример 2. Нула на функцијата $f(x) = 2x - 4$ е $x = -\frac{-4}{2} = 2$.

Пример 3. Да ја најдеме вредноста на параметарот a , за која функцијата $f(x) = ax + 7$, има нула $x_0 = -\frac{2}{3}$.

Од $-\frac{7}{a} = -\frac{2}{3}$ се добива дека $a = \frac{21}{2}$.

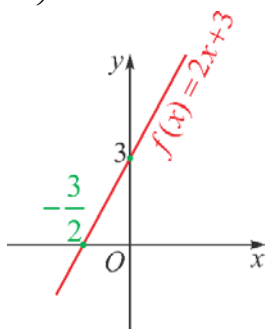


Цртеж 1

Графикот на линеарната функција $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ е права. За $x = 0$, имаме $f(0) = a \cdot 0 + b = b$, од каде што следува дека графикот на функцијата ја сече ординатната оска во точката $N(0, b)$.

Понатаму, за $x = -\frac{b}{a}$, имаме $f\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$, што значи графикот на функцијата ја сече апсцисната оска во точката $M\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ (цртеж 1).

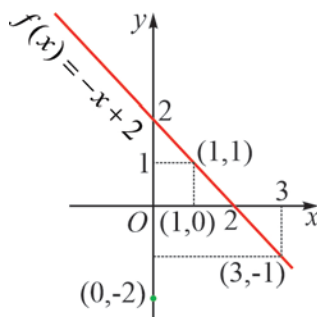
Пример 4. Графикот на линеарната функција $f(x) = 2x + 3$ е права која може да ја скицираме ако избереме две точки, на пример, пресеците со координатните оски $(0, 3)$ и $(-\frac{3}{2}, 0)$ (цртеж 2).



Цртеж 2

Пример 5. Дали точките $(1, 0)$, $(3, -1)$, $(0, -2)$ и $(1, 1)$ се точки од графикот на функцијата $f(x) = -x + 2$?

За да провериме дали точките припаѓаат на графикот на функцијата $f(x) = -x + 2$ треба да ги замениме соодветните координати на точките и да провериме дали се добиваат точни равенства. Лесно се утврдува дека точките $(3, -1)$ и $(1, 1)$ припаѓаат, а точките $(1, 0)$ и $(0, -2)$ не припаѓаат на графикот (цртеж 3).



Цртеж 3

Линеарна функција $f(x) = ax + b$ е строго растечка ако $a > 0$, додека е строго опаднувачка ако $a < 0$.

Навистина, ако $a > 0$, тогаш од $x_1 < x_2$ следува дека

$$f(x_1) = ax_1 + b < ax_2 + b = f(x_2)$$

што значи функција е строго растечка. Слично, ако $a < 0$, тогаш од $x_1 < x_2$ следува дека

$$f(x_1) = ax_1 + b > ax_2 + b = f(x_2)$$

што значи функција е строго опаѓачка.

Пример 6. Функцијата $f(x) = 4x - 11$ монотонно расте бидејќи $a = 4 > 0$, а кај функцијата $f(x) = 3 - x$, $a = -1 < 0$, па таа монотонно опаѓа.

Задача 7. Одреди ја вредноста на параметарот m во функцијата:

- а) $f(x) = (m-1)x + 3$, ако таа монотонно расте;
 б) $f(x) = (2m+1)x + 1$, ако таа монотонно опаѓа.

Решение. а) $m-1 > 0 \Rightarrow m > 1$ т.е. $m \in (1, \infty)$;

б) $2m+1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$ т.е. $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

Задачи

1. Одреди ги параметрите a и b на функцијата:

а) $f(x) = 6x - 1$; б) $f(x) = 1 - 2x$;

в) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{1}{2}$; г) $f(x) = \frac{3x-5}{7}$.

2. Одреди ја нулата на функцијата:

а) $f(x) = x - 3$; б) $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{5}$;

в) $f(x) = \frac{4-x}{9}$; г) $f(x) = \frac{2}{7} - \frac{x+1}{3}$.

3. Одреди ја вредноста на параметарот a во функцијата:

а) $f(x) = (a+1)x + 3$, ако $x_0 = -1$ е нула на функцијата;

б) $f(x) = \frac{2a+3}{5}x - \frac{1+x}{3}$, ако нејзиниот график минува низ точката $M(1,1)$;

в) $f(x) = \frac{1}{a+1}x + \frac{3}{a}$, ако нејзиниот график ја сече y -оската во точката

$N(0,3)$.

4. Дадена е функцијата $f(x) = \frac{3x+1}{6}$. Провери која од точките $A(1,1)$, $B(1,0)$, $C\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ и $D\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ припаѓа на графикот на функцијата.

5. Кои од следните функции

а) $f(x) = 2x + 5$; б) $g(x) = -3x + 2$; в) $h(x) = \frac{4}{5} - \frac{7}{8}x$.

се монотонно растечки, а кои монотонно опаѓачки?

9.3. Квадратна функција

Функција од облик

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

каде што a , b и c се реални броеви, $a \neq 0$, и x е независна променлива се вика **квадратна функција**.

Дефиниционата област на квадратната функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ е целото множество реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$.

Пример 1. Функција $f(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + 4$ е квадратна функција со коефициенти $a = -1$, $b = \frac{2}{3}$ и $c = 4$.

Нулите на квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ се реалните корени на соодветната квадратна равенка $ax^2 + bx + c = 0$. Според тоа, квадратната функција може да има две нули, една нула или да нема ниту една нула, во зависност од знакот на дискриминантата $D = b^2 - 4ac$ на нејзината соодветна квадратна равенка.

Пример 2. Најди ги нулите на квадратните функции:

а) $f(x) = x^2 + x - 12$; **б)** $f(x) = x^2 - 4x + 4$; **в)** $f(x) = x^2 + x + 12$.

а) Дискриминантата на квадратната равенка $x^2 + x - 12 = 0$ е $D = 1 + 48 > 0$ од каде што следува дека таа има два реални корени $x_1 = -4$ и $x_2 = 3$, кои се нули на дадената квадратна функција.

б) Дискриминантата на квадратната равенка $x^2 - 4x + 4 = 0$ е $D = 0$ од каде што следува дека таа има една реална нула $x = 2$, која е нула на дадената квадратна функција.

в) Дискриминантата на дадената квадратна функција $D < 0$ од каде што следува дека дадената квадратна функција нема нули.

Дадена квадратна функција $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, може да ја запишеме во **каноничен облик**

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

од каде што добиваме

$$f(x) + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Бидејќи, за секој реален број x , $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$, знакот на изразот $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ зависи само од знакот на коефициентот a . Да ги разгледаме следниве два случаи:

а) За $a > 0$ квадратната функција прима најмала вредност

$$\frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ која се постигнува за } x = -\frac{b}{2a}.$$

Квадратната функција монотонно опаѓа на интервалот $\left(-\infty, -\frac{b}{2a} \right)$ и монотонно расте на интервалот $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty \right)$.

Множеството вредности е интервалот $\left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty \right)$, односно

$$V_f = \left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty \right).$$

б) За $a < 0$ квадратната функција прима најголема вредност

$$\frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ кој се постигнува за } x = -\frac{b}{2a}.$$

Квадратната функција монотono расте на интервалот $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и монотono опаѓа на интервалот $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

Множеството вредности е интервалот $\left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$, односно

$$V_f = \left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right].$$

Точката

$$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

се вика **теме** на дадената квадратна функција.

Пример 3. а) Квадратната функција $f(x) = x^2 - 8x + 12$, за $x = 4$ прима најмала вредност -4 , и има теме $T(4, -4)$.

Функцијата монотono опаѓа на интервалот $(-\infty, 4)$ и монотono расте на интервалот $(4, +\infty)$. Множеството вредности $V_f = [-4, +\infty)$.

б) Квадратната функција $f(x) = -x^2 + x + 6$, за $x = \frac{1}{2}$ прима најголема вредност $f(x) = \frac{25}{4}$, и има теме $T\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

Функцијата монотono расте на интервалот $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ и монотono опаѓа на интервалот $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Множеството вредности $V_f = \left(-\infty, \frac{25}{4}\right]$.

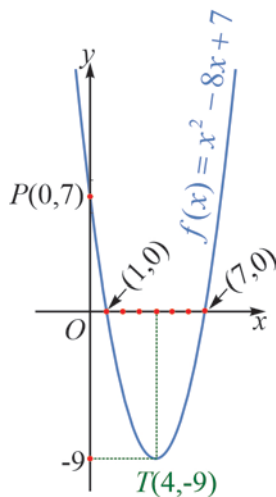
Пример 4. Да ја разгледаме квадратната функција $f(x) = x^2 - 8x + 7$. Со решавање на соодветната квадратна равенка добиваме дека функцијата има нули $x_1 = 1$ и $x_2 = 7$. Нејзиното теме е во точката $T = T(4, -9)$.

Табелата на вредности во некои вредности на променливата x е:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0
точки	P	N_1			T			N_2

Ако ги сврземе со непрекината линија точките чии координати се дадени во таблицата, ќе го добиеме приближниот график на дадената квадратна функција како на цртеж 1.

Во општ случај графикот на една квадратна функција е крива линија која се нарекува **парабола**. Притоа, согласно погорната дискусија во која ги утврдивме интервалите на монотоност, темето и множеството вредности на квадратната функција, може да забележиме дека за $a > 0$ параболата е отворена нагоре, а за $a < 0$ параболата е отворена надолу.



Цртеж 1

Пример 5. Претстави ги во ист координатен систем графиките на следниве функции:

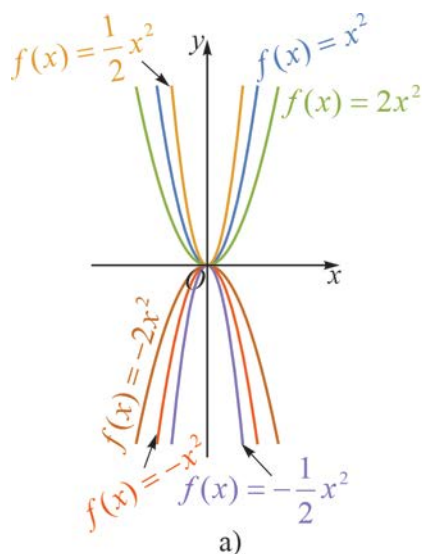
а) $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f(x) = -x^2$, $f(x) = -2x^2$,

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2$;

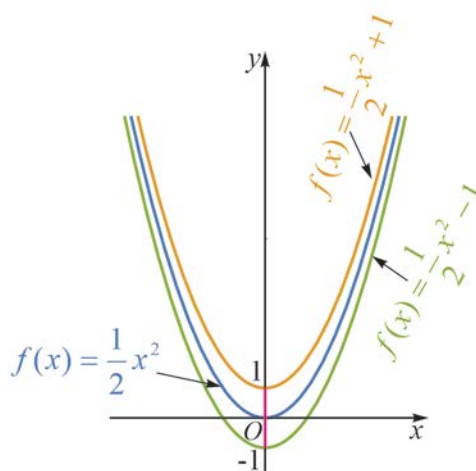
б) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$;

в) $f(x) = x^2$, $f(x) = (x+2)^2$, $f(x) = (x-1)^2$;

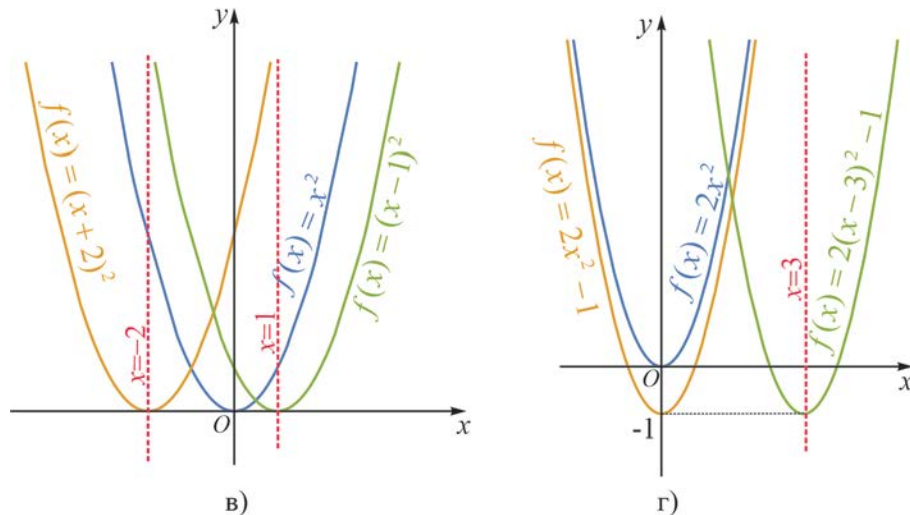
г) $f(x) = 2x^2$, $f(x) = 2x^2 - 1$, $f(x) = 2(x-3)^2 - 1$.



а)



б)



Цртеж 2

Задачи

1. Напиши ги следните квадратни функции во каноничен вид:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ б) $f(x) = -2x^2 + 12x - 10$ в) $f(x) = (x - 2)(x - 3)$.

2. Најди ги нулите на квадратните функции:

а) $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ б) $f(x) = 3x^2 - 18x + 27$ в) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

3. Најди ги координатите на темињата на следните квадратни функции:

а) $f(x) = -4x^2 + 3x + 1$ б) $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 2$ в) $f(x) = x^2 - 16x + 68$.

4. Најди ги интервалите на монотоност на следните квадратни функции:

а) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ б) $f(x) = -3x^2 - 12x - 9$ в) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.

5. Најди го множеството вредности на следните квадратни функции:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ б) $f(x) = 2x^2 + 4x + 8$ в) $f(x) = -3x^2 + 3x + 15$.

6. Нацртај ги графиците на следните функции:

а) $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}$ б) $f(x) = -4x^2 + 1$ в) $f(x) = (x - 1)(x + 3)$.

7. Дадени се квадратните функции $f(x) = 3x^2 - 5x - 7$ и $g(x) = -x^2 - 4x - 8$.

а) Трансформирај ги функциите во каноничен облик;

б) Скицирај ги графиците на f и g .

9.4. Степенски функции

Функција од облик $f(x) = x^p$, каде што p е реален број се вика **степенска функција**.

Степенската функција ќе ја разгледуваме во следните случаи:

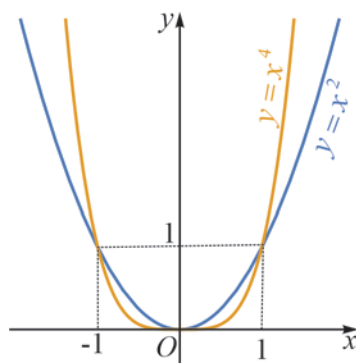
1⁰. Ако показателот p е парен природен број, тогаш функцијата е од облик

$f(x) = x^{2n}$, n е природен број.

Некои од својствата на функцијата се:

- Дефинициона област $D_f = \mathbb{R}$.
- Множеството вредности $V_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- Функцијата опаѓа на интервалот $(-\infty, 0)$ и расте на интервалот $(0, +\infty)$.
- Функцијата има нула во $x = 0$.
- Графикот на функцијата е симетричен во однос на y -оската, и минува низ точките $(-1, 1)$, $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Пример 1. На цртеж 1 се претставени функциите $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^4$.



Цртеж 1

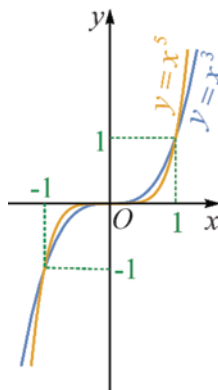
2^o. Ако показателот p е непарен природен број, тогаш функцијата е од облик

$f(x) = x^{2n-1}$, n е природен број.

Некои од својствата на функцијата се:

- Дефинициона област $D_f = \mathbb{R}$.
- Множеството вредности $V_f = \mathbb{R}$.
- Функцијата расте на целата реална права.
- Функцијата има нула во $x = 0$.
- Графикот на функцијата е симетричен во однос на координатниот почеток, и минува низ точките $(-1, -1)$, $(0, 0)$ и $(1, 1)$.

Пример 2. На цртеж 2 се претставени функциите $f(x) = x^3$ и $g(x) = x^5$.



Цртеж 2

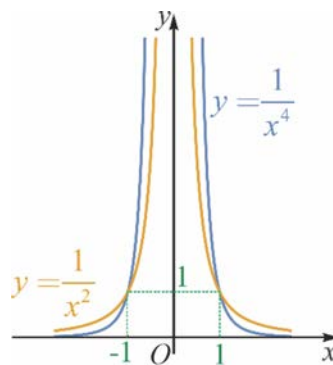
3⁰. Ако показателот p е цел негативен природен број, тогаш функцијата е од облик

а) $f(x) = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, n е природен број.

Некои од својствата на функцијата се:

- Дефинициона област $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Множеството вредности $V_f = \mathbb{R}^+$.
- Функцијата расте на интервалот $(-\infty, 0)$ и опаѓа на интервалот $(0, +\infty)$.
- Функцијата нема нули.
- Графикот на функцијата е симетричен во однос на y -оската, и минува низ точките $(-1, 1)$ и $(1, 1)$.

Пример 3. На цртеж 3 се претставени функциите $f(x) = \frac{1}{x^2}$ и $g(x) = \frac{1}{x^4}$.



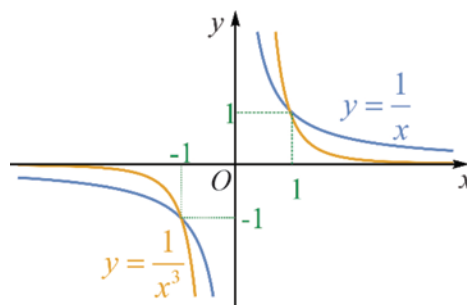
Цртеж 3

б) $f(x) = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, n е природен број (цртеж 4).

Некои од својствата на функцијата се:

- Дефинициона област $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Множеството вредности $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Функцијата опаѓа на целата дефинициона област.
- Функцијата нема нули.
- Графикот на функцијата е симетричен во однос на на координатниот почеток, и минува низ точките $(-1, -1)$ и $(1, 1)$.

Пример 4. На цртеж 4 се претставени функциите $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \frac{1}{x^3}$.



Цртеж 4

4⁰. Ако показател p е позитивен рационален број, односно $p = \frac{m}{n}$, каде што m и n се заемно прости природни броеви, тогаш функцијата е од облик

а) $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, n е парен број.

Некои од својствата на функцијата се:

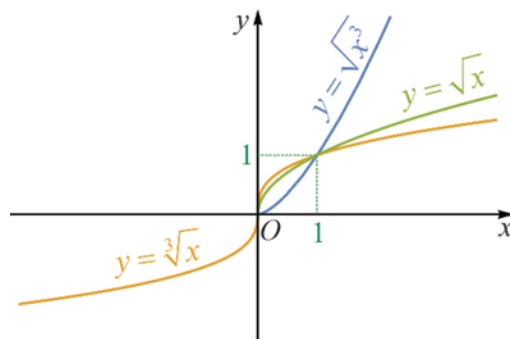
- Дефинициона област $D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- Множеството вредности $V_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.
- Функцијата расте на целата дефинициона област.
- Функцијата има нула во $x = 0$.
- Графикот на функцијата минува низ точката $(1, 1)$.

б) $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, n е непарен број.

Некои од својствата на функцијата се:

- Дефиниционата област $D_f = \mathbb{R}$.
- Множеството вредности $V_f = \mathbb{R}$.
- Функцијата расте на целата дефинициона област.
- Функцијата има нула во $x = 0$.
- Графикот на функцијата минува низ точките $(-1, -1)$ и $(1, 1)$.

Пример 5. На цртеж 5 се претставени функциите $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x^3}$ и $h(x) = \sqrt[3]{x}$.



Цртеж 5

Задачи

Напиши ги својствата и нацртај ги во ист координатен систем графичите на следните функции:

1. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$ и $f(x) = x^8$.
2. $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$ и $f(x) = x^7$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \frac{1}{x^4}$ и $f(x) = \frac{1}{x^6}$.
4. $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = \frac{1}{x^5}$ и $f(x) = \frac{1}{x^7}$.

5. $f(x) = \sqrt{x^3}$, $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$ и $f(x) = \sqrt[8]{x^3}$.

6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ и $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.

9.5. Експоненцијална функција

Функција од облик

$$f(x) = a^x, \quad a > 0 \text{ и } a \neq 1,$$

се вика **експоненцијална функција**.

Ограничување $a \neq 1$ во дефиницијата е потребно заради фактот дека при $a = 1$ функцијата $f(x) = a^x = 1^x = 1$ е константната функција којашто не припаѓа во класата на експоненцијални функции.

Пример 1. Функциите $f(x) = 2^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = 0,25^x$, $f(x) = (\sqrt{5})^x$ се примери на експоненцијални функции.

Со користење на својствата на степен со реален показател, доаѓаме до следните својства на експоненцијалната функција $f(x) = a^x$, $a > 0$ и $a \neq 1$.

- За $a > 0$ и $a \neq 1$, степенот a^x е дефиниран за секоја вредност на x . Според тоа, дефинициона област D_f на експоненцијалната функција е множеството реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$.

- Бидејќи $a^x > 0$ за секој реален број x , и за $a > 0$, $a \neq 1$, $A > 0$ постои единствен реален број x , така што $a^x = A$, имаме дека множеството вредности на експоненцијалната функција се состои од сите позитивни реални броеви, односно $V_f = \mathbb{R}^+$.

- Бидејќи $a^x > 0$ за секој реален број x , може да заклучиме дека експоненцијалната функција нема нули.

- За $a > 1$, од $x_1 < x_2$ следува дека $a^{x_1} < a^{x_2}$, и за $0 < a < 1$, од $x_1 < x_2$ следува дека $a^{x_1} > a^{x_2}$. Тоа значи дека за $a > 1$ функцијата е монотono растечка на множеството реални броеви, додека за $0 < a < 1$ функцијата е монотono опаѓачка на множеството реални броеви.

Пример 2. Да ги искажеме својствата на функцијата $f(x) = 2^x$.

Дефинициона област D_f на функцијата е множеството реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$, додека множеството вредности на функција се состои од сите позитивни реални броеви, односно $V_f = \mathbb{R}^+$.

Функцијата нема нули.

Бидејќи $2 > 1$ функцијата е монотono растечка на множеството реални броеви.

Пример 3. Да ја најдеме дефиниционата област на следните функции:

а) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$; в) $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$.

а) Дефиниционата област е множеството реални броеви, односно $D_f = \mathbb{R}$.

б) Дропката $\frac{1}{x}$ е дефинирана за сите реални броеви $x \neq 0$, па според тоа $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

в) Квадратниот корен е дефиниран за ненегативни реални броеви, па според тоа $D_f = [0, +\infty)$.

Пример 4. Испитај ја монотоноста на следните функции:

а) $f(x) = 3^x$; б) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; в) $f(x) = 0,7^{x+2}$; г) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

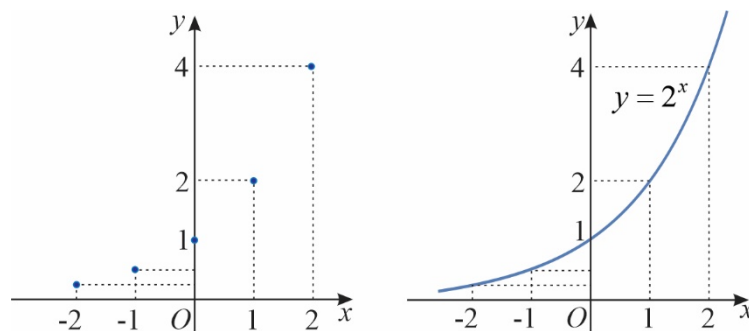
Функциите под а) и г) се монотонно растечки бидејќи основата на степенот е поголема од 1, додека функциите под б) и в) се монотонно опаѓачки бидејќи основата на степенот е реален број помеѓу 0 и 1.

Пример 5. Да го нацртаме графикот на функцијата $f(x) = 2^x$.

Наоѓаме неколку точки од графикот со помош на табелата

x	-2	-1	0	1
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

Потоа нив ги нанесуваме во избран правоаголен координатниот систем xOy .



Цртеж 1

Ако нанесеме повеќе точки, имајќи во вид дека функцијата е монотонно растечка функција, добиваме претстава за нејзиниот график (цртеж 1).

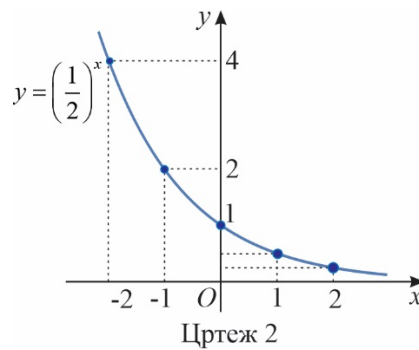
Да забележиме дека кога вредностите на x неограничено опаѓаат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не достигнуваат вредност нула. Тоа значи дека графикот на функцијата се приближува кон x -оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре x -оската. Тогаш велиме дека x -оската е **асимптота** на функцијата $f(x) = 2^x$.

Пример 6. Да го нацртаме графикот на функцијата $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

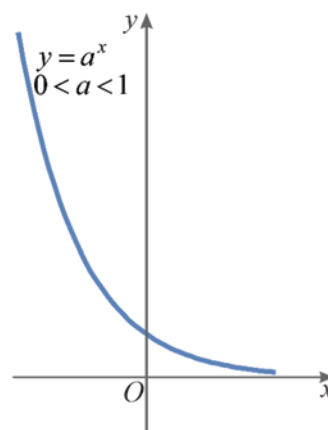
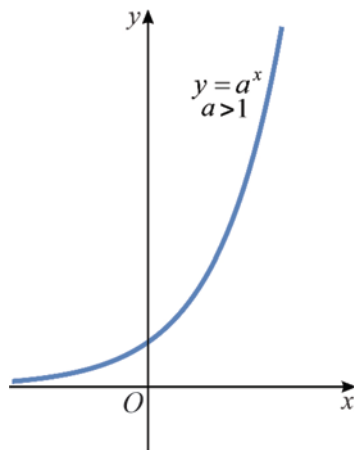
Наоѓаме неколку точки од нејзиниот график:

x	-2	-1	0	1	2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Добиените точките ги нанесуваме во избраниот координатен систем xOy . Поврзувајќи ги овие точки со непрекинатата линија, го добиваме графикот на функцијата (цртеж 2).



Да забележиме дека кога вредностите на x неограничено растат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не достигнуваат вредност нула. Тоа значи дека графикот на функцијата се приближува кон x – оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре x – оската. Тогаш велиме дека x – оската е **асимптота** на функцијата $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Заклучокот од претходните примери важи и во општ случај. За $a > 1$ ако вредностите на x неограничено опаѓаат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не достигнуваат вредност нула, односно x – оската е **асимптота** на функцијата $f(x) = a^x$ (цртеж 3).

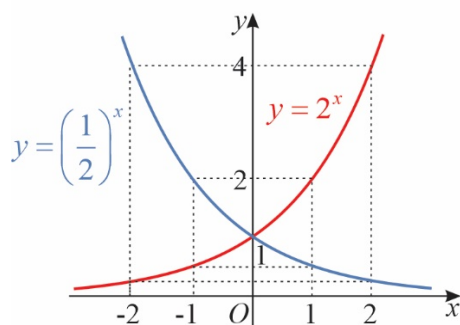
Слично, за $0 < a < 1$ ако вредностите на x неограничено растат, соодветните вредности на функцијата остануваат позитивни, се намалуваат и никогаш не

достигнуваат вредност нула, односно x -оската е **асимптота** на функцијата $f(x) = a^x$ (цртеж 4).

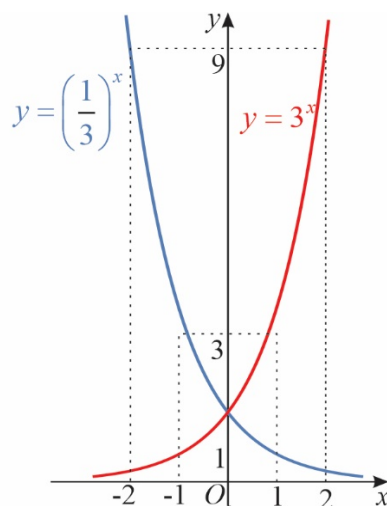
Пример 7. Да го нацртаме во ист координатен систем графиците на функциите

а) $f(x) = 2^x$ и $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

б) $f(x) = 3^x$ и $f(x) = \log_5(x-1)$.



Цртеж 5



Цртеж 6

Забележуваме дека графиците на функциите $f(x) = 2^x$ и $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ се симетрични во однос на y -оската (цртеж 5). Навистина, ако точката $M(x, y)$ припаѓа на графикот на функцијата $f(x) = 2^x$ тогаш $N(-x, y)$ припаѓа на графикот на функцијата $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, бидејќи $2^x = 2^{-(-x)} = \frac{1}{2^{-x}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$.

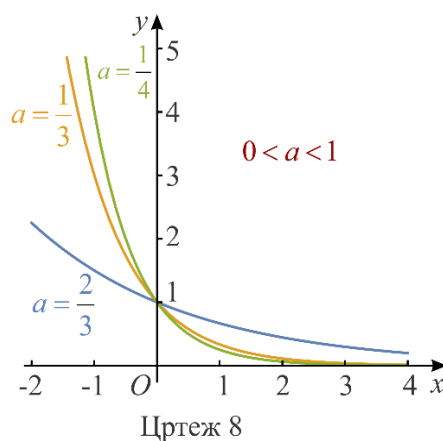
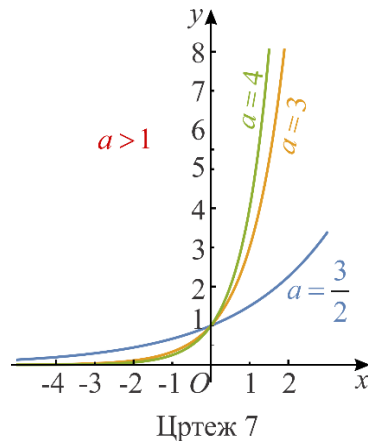
Слично, графиците на функциите $f(x) = 3^x$ и $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ се симетрични во однос на y -оската (цртеж 6).

Согледувањата од последниот пример важат за било кои две експоненцијални функции $f(x) = a^x$ и $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$. Навистина, ако точката $M(x, y)$ припаѓа на графикот на функцијата $f(x) = a^x$ тогаш $N(-x, y)$ припаѓа на графикот на функцијата $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, бидејќи $a^x = a^{-(-x)} = \frac{1}{a^{-x}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$.

Пример 8. На цртеж 7 и цртеж 8 се нацртани графиците на некои експоненцијални функции:

а) $f(x) = a^x$ за $a > 1$

б) $f(x) = a^x$ за $0 < a < 1$



Од погорниот пример може да согледаме дека за иста вредност $x > 0$, вредностите на експоненцијалните функции $y = a_1^x$, $y = a_2^x, \dots$, се во ист редослед како вредностите $a_1, a_2, \dots$, за $a_1, a_2, \dots > 1$, а во обратен редослед од редоследот на $a_1, a_2, \dots$, за $0 < a_1, a_2, \dots < 1$.

Од друга страна, за иста вредност $x < 0$, вредностите на експоненцијалните функции $y = a_1^x$, $y = a_2^x, \dots$, се во обратен редослед од редоследот на вредностите $a_1, a_2, \dots$, за $a_1, a_2, \dots > 1$, и се во ист редослед со вредностите $a_1, a_2, \dots$, за $0 < a_1, a_2, \dots < 1$.

Задачи

1. Кои од следниве функции

а) $f(x) = 5^{x-1}$; б) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$; в) $f(x) = 7^{\frac{1}{x-3}}$; г) $f(x) = 4^{\sqrt{x+2}}$; се експоненцијални?

2. Искажи ги својствата на следните функции:

а) $f(x) = 3^x$; б) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; в) $f(x) = 5 \cdot 2^x$; г) $f(x) = 0,4^x$.

3. Најди ја дефиниционата област на следните функции:

а) $f(x) = 3^{x-2}$; б) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$; в) $f(x) = 4^{\frac{1}{x-1}}$; г) $f(x) = 7^{\sqrt{x+4}}$.

4. Испитај ја монотоноста на следните функции:

а) $f(x) = 7^{x+3}$; б) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$; в) $f(x) = 0,2^{x-1}$; г) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+3}$.

5. Нацртај го графикот на функциите:

а) $f(x) = 5^x$; б) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; в) $f(x) = -2^x$; г) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

9.6. Логаритамска функција

Функција од облик $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ и $a \neq 1$ се нарекува **логаритамска функција**.

Пример 1. Логаритамски функции се, на пример, функциите:

$$f(x) = \log_2 x, \quad f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad f(x) = \lg x, \quad f(x) = \ln x.$$

Со помош на дефиницијата за логаритамска функција $f(x) = \log_a x$ и својствата на експоненцијална функција $f(x) = a^x$, како и врската

$$\log_a x = f(x) \Leftrightarrow a^{f(x)} = x$$

доаѓаме до следните својства на логаритамската функција.

- Дефинициона област на логаритамската функција $f(x) = \log_a x$ е множеството $\mathbb{R}^+$, односно $D_f = \mathbb{R}^+$.
- Множеството вредности на логаритамската функција $f(x) = \log_a x$ е множество реални броеви, односно $V_f = \mathbb{R}$.
- Реалниот број $x = 1$ е нула на логаритамската функција.
- Логаритамската функција $f(x) = \log_a x$, за $a > 1$ монотонно расте, додека за $0 < a < 1$ монотонно опаѓа на целата дефинициона област D_f .

Пример 2. Да ги искажеме својствата на функцијата $f(x) = \log_2 x$.

Дефинициона област на функцијата $D_f = \mathbb{R}^+$.

Множеството вредности на функцијата $V_f = \mathbb{R}$.

Реалниот број $x = 1$ е нула на функцијата.

Функцијата монотонно расте, бидејќи $2 > 1$.

Пример 3. Да ги најдеме дефиниционите области на логаритамските функции:

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$; **б)** $f(x) = \lg(x+3)$; **в)** $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x + 7$;

а) $D_f = \mathbb{R}^+$

б) Од $x+3 > 0$, добиваме дека $D_f = (-3, +\infty)$

в) Дефиниционата област $D_f = \mathbb{R}^+$.

Пример 4. Да ја испитаме монотоноста на следните функции:

а) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$; **б)** $f(x) = \log_{0,3}(x-3)$; **в)** $f(x) = \log_5(x^2 + 4)$.

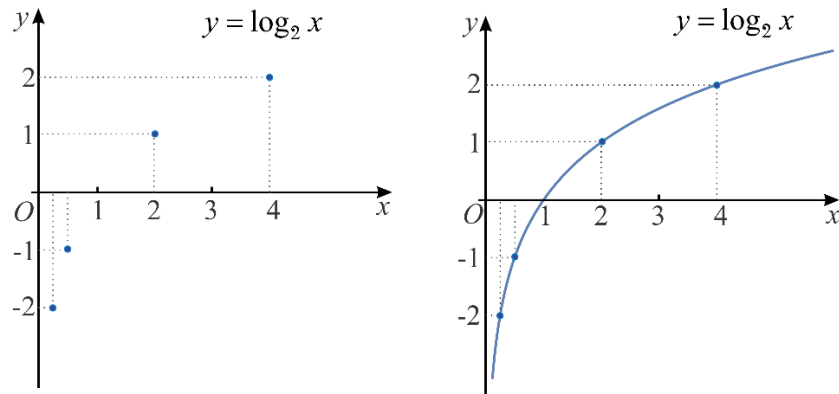
Функцијата под а) е монотонно растечка бидејќи основата на логаритмите е поголема од 1, додека функциите под б) и в) се монотонно опаѓачки бидејќи основата на логаритмите е реален број помеѓу 0 и 1.

Пример 5. Да го нацртаме графикот на функцијата $f(x) = \log_2 x$.

Наоѓаме неколку точки од графикот со помош на табелата

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x) = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2

Потоа нив ги нанесуваме во избран правоаголен координатниот систем xOy . Ако нанесеме повеќе точки, имајќи во вид дека $f(x) = \log_2 x$ е монотонно растечка функција, добиваме претстава за нејзиниот график (цртеж 1).



Цртеж 1

Кога вредностите на x се приближуваат кон 0, соодветните вредности на функцијата неограничено се намалуваат, па графикот на функцијата се приближува кон y – оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре y – оската. Тогаш велиме дека y – оската е **асимптота** на функцијата $f(x) = \log_2 x$.

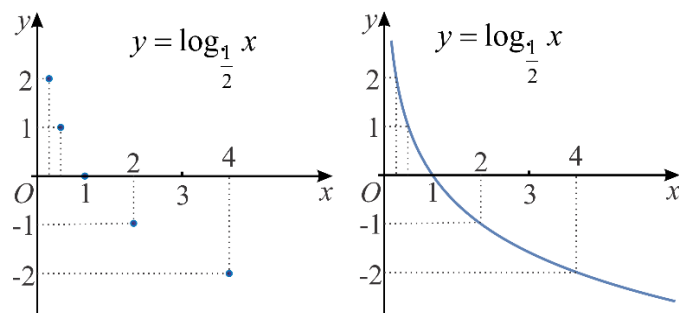
Пример 6. Да го нацртаме графикот на функцијата $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Како и во претходниот пример, наоѓаме неколку точки од графикот со помош на табелата

x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	-2	-1	0	1	2

Добиените точки ги нанесуваме во правоаголен координатниот систем xOy . Со нанесување на повеќе точки, имајќи во вид дека $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ е монотонно опаѓачка функција, добиваме претстава за нејзиниот график (цртеж 2).

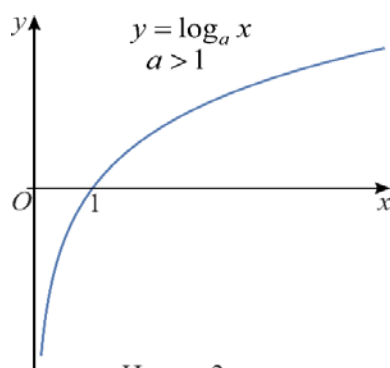
Да забележиме дека кога вредностите на x се приближуваат кон 0, соодветните вредности на функцијата неограничено растат. Тоа значи дека графикот на функцијата се приближува кон y – оската, но никогаш нема да ја пресече ниту да ја допре y – оската. Тогаш велиме дека y – оската е **асимптота** на графикот на функцијата $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.



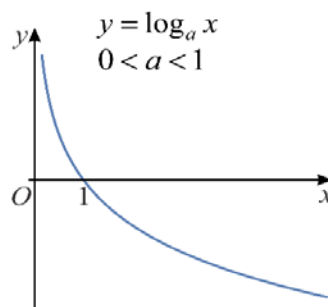
Цртеж 2

Заклучокот од претходните примери важи и во општ случај. Поточно, за $a > 1$ ако вредностите на x се приближуваат кон 0, соодветните вредности на функцијата неограничено се намалуваат, односно y -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $f(x) = \log_a x$ (цртеж 3).

Слично, за $0 < a < 1$ ако вредностите на x се приближуваат кон 0, соодветните вредности на функцијата неограничено растат, односно y -оската е **асимптота** на графикот на функцијата $f(x) = \log_a x$ (цртеж 4).



Цртеж 3

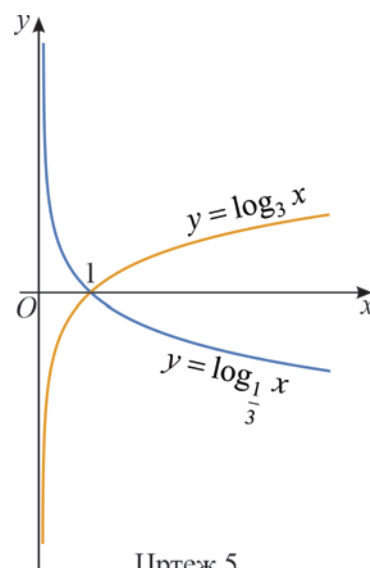


Цртеж 4

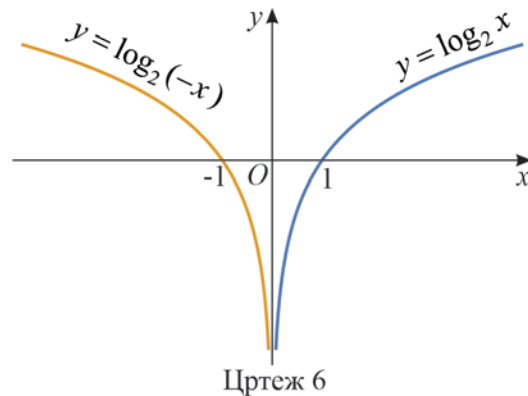
Пример 7. Да ги нацртаме графиците на функциите $f(x) = \log_3 x$ и $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ во ист координатен систем.

Тие тие се симетрични во однос на x -оската, бидејќи $\log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x$ (цртеж 5).

Заклучокот од претходниот пример важи во општ случај. Заради равенството $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$, графиците на функциите $f(x) = \log_a x$ и $f(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ се симетрични во однос на x -оската.



Цртеж 5



Пример 8. Ако ги нацртаме во ист координатен систем графиците на функциите $f(x) = \log_2 x$ и $f(x) = \log_2(-x)$, ќе забележиме дека тие се симетрични во однос на y -оската (цртеж 6).

Заклучокот од претходниот пример важи и во општ случај, односно графиците на функциите $f(x) = \log_a x$ и $f(x) = \log_a(-x)$ се симетрични во однос на y -оската.

Задачи

1. Кои од следниве функции

- а) $f(x) = \log_5(x-1)$; б) $f(x) = \log_x 7$; в) $f(x) = 7^{\log x}$;

се логаритамски?

2. Искажи ги својствата на следните логаритамски функции:

- а) $f(x) = \log_5 x$; б) $f(x) = \log_{0,3} x$; в) $f(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$.

3. Најди ја дефиниционата област на следните логаритамски функции:

- а) $f(x) = \log_5 x + 12$; б) $f(x) = \lg(x+9)$;
г) $f(x) = \log_2(x^2 + x)$; д) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3x^2 + 5x + 2)$.

4. Испитај ја монотоноста на следните логаритамски функции:

- а) $f(x) = -\log_2 x$; б) $f(x) = \log_{\frac{1}{7}}(2x+1)$; в) $f(x) = \ln x$.

5. Нацртај го графикот на функциите:

- а) $f(x) = -\log_2 x$; б) $f(x) = -\log_{\frac{1}{3}}(x)$; в) $f(x) = \log_2(-x)$.

9.7. Инверзна функција

Композиција $f \circ g$ на функциите f и g со дефинициони области D_f и D_g , соодветно, се дефинира со

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \text{ за секој } x \in D_{f \circ g}$$

каде што $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

Аналогно, композиција $g \circ f$ на функциите g и f со дефинициони области D_g и D_f соодветно, се дефинира со

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ за секој } x \in D_{g \circ f}$$

каде што $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

Пример 1. Нека $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинирани со $f(x) = 2x$ и $g(x) = 3x + 1$. Да ги најдеме композициите $f \circ g$ и $g \circ f$. Имаме дека

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x + 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = 2(3x + 1) = 6x + 2, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}, \text{ и}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 3(2x) + 1 = 6x + 1.$$

Очигледно дека $f \circ g \neq g \circ f$, односно за состав на две функции во општ случај не важи комутативниот закон.

Ако функциите f и g ги задоволуваат условите:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \text{ за секој } x \in D_f, \text{ и}$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y, \text{ за секој } y \in D_g \quad (1)$$

тогаш велиме дека f е **инверзна функција** на функцијата g и g е инверзна функција на функцијата f .

Пример 2. Да провериме дека функцијата $f(x) = x^3 + 1$ е инверзна на функцијата $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ бидејќи

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 1) = \sqrt[3]{(x^3 + 1) - 1} = x, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}, \text{ и}$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(\sqrt[3]{y-1}) = (\sqrt[3]{y-1})^3 + 1 = y, \text{ за секој } y \in \mathbb{R}.$$

Може да се покаже дека ако f има инверзна функција, тогаш таа е единствена. Од таа причина допуштено е инверзната функција на f да ја означиме со f^{-1} . Сега, равенствата (1) го добиваат обликот

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \text{ за секој } x \in D_f, \text{ и}$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y, \text{ за секој } y \in D_{f^{-1}} \quad (2)$$

Ако сакаме да ги нацртаме графиците на функциите f и f^{-1} во ист координатен систем, тогаш треба да сметаме дека x е независна променлива и y е зависна променлива за двете функции. Во таа смисла, за да ги нацртаме графиците на функциите $f(x) = x^3 + 1$ и $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ во ист координатен систем, ја заменуваме независната променлива y со x , и ги цртаме графиците на функциите

$$y = x^3 + 1 \text{ и } y = \sqrt[3]{x-1}$$

После овој договор равенствата (2) добиваат облик

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \text{ за секој } x \in D_f, \text{ и}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, \text{ за секој } x \in D_{f^{-1}} \quad (3)$$

Равенствата (3) ги повлекуваат следниве врски помеѓу дефиниционите области и множествата вредности на f и f^{-1}

$$D_{f^{-1}} = V_f \text{ и } V_{f^{-1}} = D_f$$

Навистина, првото равенство во (3) повлекува дека f^{-1} е дефинирана во $f(x)$ за секој x од дефиниционата област на f , и ова повлекува дека множеството вредности на f е подмножество од дефиниционата област на f^{-1} .

Обратно, ако x е во дефиниционата област на f^{-1} , тогаш второто равенство во (3) повлекува дека x е во множеството вредности на f . Според тоа, дефиниционата област на f^{-1} е подмножество од множеството вредности на f .

Доказот на второто равенство се спроведува аналогно.

Освен тоа, независната променлива на дадената функција е променлива на нејзината инверзна функција, а променливата на дадената функција е независна променлива на нејзината инверзна функција. Затоа можеме да запишеме

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Оттука произлегува следното практична постапка за наоѓање на инверзна функција на дадена функција. Во формулата $y = f(x)$ доволно е само x и y да си ги заменат своите места, а потоа така добиената равенка се решава по однос на y за да се изрази како функција по x .

Пример 3. Нека е дадена линеарната функција $y = ax + b$. Со замена на местата на x и y добиваме $x = ay + b$. Ако добиената равенка ја решиме по y ја добиваме инверзната функција која е повторно линеарна функција: $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$.

Пример 4. Да ја најдеме инверзната функција на

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

Според утврдената постапка прво запишуваме $y = \sqrt{3x-2}$. Со замена на местата на x и y добиваме $x = \sqrt{3y-2}$. Ако добиената равенка ја решиме по y ја добиваме формулата за инверзната функција $y = \frac{x^2+2}{3}$, односно

$f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}$. Знаеме дека $D_{f^{-1}} = V_f$ и дека $V_f = [0, +\infty)$, па според тоа $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$. Така добиваме дека инверзната функција на дадената функција е

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}, \quad x \geq 0.$$

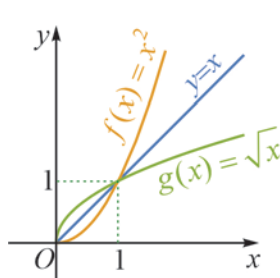
Да воочиме дека, ако се определува дефиниционата област на инверзната функција директно од формулата, ќе се добие дека $D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$, што не е точно и на тоа треба посебно да се внимава.

Од самата дефиниција на инверзната функција добиваме дека точката (x, y) припаѓа на графикот на дадена функција f ако и само ако точката (y, x) припаѓа на графикот на нејзината инверзна функција. Точките (x, y) и (y, x) се

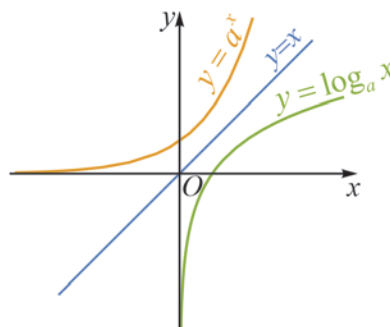
симетрични во однос на правата $y = x$ во координатната рамнина. Оттука добиваме дека графикот на инверзната функција $f^{-1}(x)$ е **симетричен** на графикот на функцијата $f(x)$ во однос на симетралата на I и III квадрант, односно во однос на правата $x = y$.

Оттука, но исто така и од самата дефиниција, следува дека ако g е инверзна функција на функцијата f , тогаш f е инверзна функција на функцијата g , што значи дека тие се заемно инверзни.

Пример 5. Функциите $f(x) = x^2$ и $g(x) = \sqrt{x}$ се заемно инверзни на интервалот $[0, +\infty)$. Заемно инверзни се и функциите $f(x) = x^2$ дефинирана на интервалот $(-\infty, 0]$ и $h(x) = -\sqrt{x}$ дефинирана на интервалот $[0, +\infty)$ (цртеж 1).



Цртеж 1



Цртеж 2

Пример 6. Инверзни една на друга се и функциите (цртеж 2)

$$y = a^x \text{ и } y = \log_a x$$

Задачи

1. Најди ги композициите $f \circ g$ и $g \circ f$, ако $f(x) = \ln(x+1)$, за секое $x \in (-1, \infty)$, и $g(x) = e^{2x-3}$, за секој $x \in \mathbb{R}$

2. Најди ја инверзната функција на секоја од следните функции:

а) $f(x) = 2x+1$; **б)** $f(x) = 2^x$; **в)** $f(x) = \frac{1}{x}$; **г)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

3. Покажи дека за функцијата $f(x) = \frac{1+x}{x-1}$ важи

$$(f \circ f)(x) = x, \text{ за секој } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

4. Покажи дека функцијата $f(x) = \frac{1+3x}{x-3}$ е инверзна сама на себе.

9.8. Поим на низа

Да разгледаме функција f од множеството на природните броеви во множеството на реалните броеви. Таа е зададена ако се познати вредностите на функцијата $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n, \dots$

Низа е функција од множеството на природните броеви во множеството на реалните броеви.

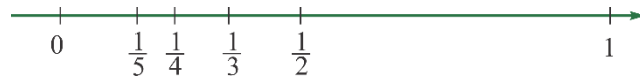
Низата ќе ја запишуваме накратко со $a_1, a_2, a_3, \dots$ или уште пократко со (a_n) . Притоа a_n се нарекува општ член на низата (a_n) .

Пример 1. Запиши ги првите пет члена на низата со општ член a_n , ако:

а) $a_n = \frac{1}{n}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n(n-1)}{n}$; в) $a_n = n^{(-1)^n}$;

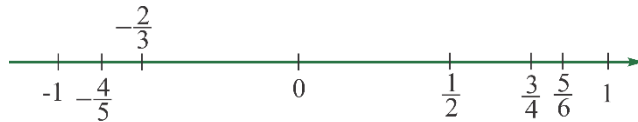
а потоа зададените низи претстави ги графички на бројната оска.

а) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$.



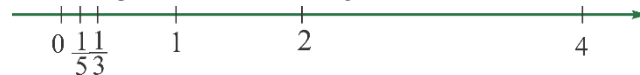
Цртеж 1

б) $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{2}{3}, a_4 = \frac{3}{4}, a_5 = -\frac{4}{5}$.



Цртеж 2

в) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 4, a_5 = \frac{1}{5}$.



Цртеж 3

Пример 2. Најди формула за општиот член a_n на следните низи:

а) $-1, 1, -1, \dots$; б) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$; в) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

а) $a_n = (-1)^n$; б) $a_n = \frac{1}{2^n}$; в) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$.

Низите можат да задоволуваат некои својства. Тие својства најчесто се условите за растење и опаѓање, како и ограниченост на низите.

За низата (a_n) велиме дека е

- **монотono растечка** ако $a_{n+1} > a_n$, за секој природен број n
- **монотono опаѓачка** ако $a_{n+1} < a_n$, за секој природен број n .

Условот за монотono растење на една низа покажува дека секој нареден член на низата е поголем од претходниот член. На пример, низата со општ член $a_n = 5n - 2$ е растечка, бидејќи $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ односно $1 < 4 < 7 < \dots$. Непосредно се уверуваме дека

$$a_{n+1} - a_n = 5(n+1) - 2 - [5n - 2] = 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5 > 0$$

па оттука заклучуваме дека $a_{n+1} > a_n$, за секој природен број n .

Условот за опаѓање на една низа покажува дека секој нареден член на низата е помал од претходниот член.

Пример 3. На пример, низата со општ член $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ е опаѓачка, бидејќи $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$, односно $2 > 1\frac{1}{4} > 1\frac{1}{9} > \dots$. Непосредно се уверуваме дека

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0$$

па оттука следува дека $a_{n+1} < a_n$ за секој природен број n .

Да напомниме дека не секоја низа мора да задоволува некое од погорните својства. Таква е низата 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2, 5, 2,

За една низа велиме дека е **ограничена од горе**, ако постои реален број M , така што

$$a_n < M, \text{ за секој природен број } n.$$

Аналогно дефинираме низа ограничена од долу на следниот начин.

За една низа велиме дека е **ограничена од долу**, ако постои реален број M , така што

$$a_n > M, \text{ за секој природен број } n.$$

Низите кои истовремено се ограничени од горе и од долу ги нарекуваме ограничени. Нив можеме да ги дефинираме на следниот начин.

За една низа велиме дека е **ограничена**, ако постои позитивен реален број M , така што

$$|a_n| < M, \text{ за секој природен број } n.$$

Пример 4. а) Низата со општ член $a_n = 3^n$ е ограничена од долу, на пример, со бројот 0, но не е ограничена од горе.

б) Низата $-1, 1, -2, \frac{1}{2}, -3, \frac{1}{3}, -4, \frac{1}{4}, -5, \frac{1}{5}, \dots$ е ограничена од горе со бројот 2, но не е ограничена од долу.

в) Низата $a_n = \frac{(-1)^n(n-1)}{n}$ е ограничена и од горе и од долу, со било кој број поголем од бројот 1, бидејќи $|a_n| = \left| \frac{(-1)^n(n-1)}{n} \right| = \frac{n-1}{n} \leq 1$.

Пример 5. Да ја разгледаме низата со општ член $a_n = 3n - 2$. Оваа низа е растечка, бидејќи $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$. Во овој случај првиот член е $a_1 = 1$ и тој е најмалиот член во низата, па според тоа оваа низа е ограничена од долу со произволен број помал од 1, на пример со 0.

Низа којашто не е ограничена се нарекува **неограничена**. Со други зборови, низата (a_n) е неограничена ако за секој реален број M постои природен број n , така што $|a_n| \geq M$.

Задачи

1. Најди барем една формула за општиот член a_n на следниве низи:

а) $2, 5, 8, 11, 14, \dots$ б) $4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \dots$ в) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

2. Кои низи велиме дека се растечки, а кои се опаѓачки?

3. Покажи дека низата со општ член a_n е ограничена одгоре:

а) $a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $a_n = \frac{n^3 + 2}{n^3}$; в) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\log n}$.

4. Покажи дека низата со општ член a_n е ограничена оддолу:

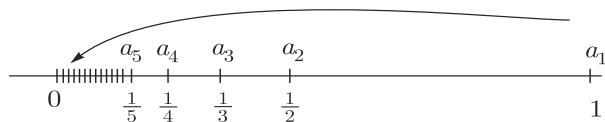
а) $a_n = 2 + \frac{1}{n^2}$; б) $a_n = (-1)^n$; в) $a_n = \frac{n-1}{n}$.

5. Покажи дека низата $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$ е ограничена.

9.9. Граница на низа

Поим за граница на низа

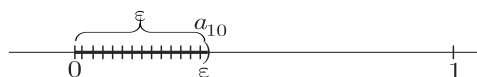
Пример 1. Да ја разгледаме низата (a_n) , каде $a_n = \frac{1}{n}$, и да претставиме на реалната оска неколку нејзини почетни членови (цртеж 1).



Цртеж 1

Може да забележиме дека точките кои одговараат на овие членови од низата се „движат“ од 1 кон нулата, која не е член на низата.

Ако земеме ε , на пример, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, во ε -околината на 0 т.е. интервалот $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ќе се најдат членовите $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$, и нив ги има бесконечно многу (цртеж 2).



Цртеж 2

Надвор од оваа ε -околина има 10 члена. Во ваков случај велиме дека низата се натрупува околу тачката $a = 0$.

Дефиниција 1. Точката $a \in \mathbb{R}$ вика **точка на натрупување** за низата (a_n) ако во секоја нејзина ε -околина се наоѓаат бесконечно многу членови од низата.

Со други зборови, ако за секое $\varepsilon > 0$, важи $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, за бесконечно многу $n \in \mathbb{N}$ т.е. $|a_n - a| < \varepsilon$, за бесконечно многу $n \in \mathbb{N}$.

Пример 2. а) За низата (a_n) , со општ член $a_n = 2$, точка на натрупување е бројот 2 бидејќи сите членови на низата се во било која околина на тачката 2.

б) Низата (a_n) , со општ член $a_n = n^2$, нема точка на натрупување бидејќи нејзините членови неограничено се зголемуваат.

в) За низата (a_n) , со општ член $a_n = (-1)^n$, точки на натрупување се броевите -1 и 1 бидејќи во произволна околина на секој од броевите има бесконечно многу членови од низата.

Како што видовме во пример 1, за низата со општ член $a_n = \frac{1}{n}$ интуитивно е јасно дека за големи броеви на индексот n , n -тиот член на низата е близок до 0, така што како n расте, $a_n = \frac{1}{n}$ е се поблиску до бројот 0 (цртеж 1). Тој факт може да го објасниме на следниов начин.

За секој позитивен број ε постои природен број n_0 , така што $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, односно $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. На пример, ако $\varepsilon = 0,01$ тогаш $n_0 > \frac{1}{0,01} = 100$, ако $\varepsilon = 0,001$ тогаш $n_0 > \frac{1}{0,001} = 1000$. Сега за произволен број $n > n_0$ важи

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

што значи дека $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, односно за големи вредности на n важи $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$. Во овој случај велиме дека низата конвергира (се стреми) кон бројот 0.

Во општ случај, ако низата се стреми кон некој број a , тогаш ќе треба за кој било позитивен мал број ε , да постои број n_0 , така што за $n > n_0$ да важи $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, односно сите членови a_n што одговараат за овие вредности на n да се разликуваат од a по апсолутна вредност помалку од ε .

Дадениот пример го мотивира воведувањето на поимот граница на низа.

Дефиниција 2. Реалниот број a се нарекува **гранична вредност** или **граница** на низата реални броеви (a_n) ако за секој позитивен број ε постои природен број n_0 , така што

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ за секој } n \geq n_0$$

и пишуваме $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Значи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Да забележиме дека во дефиницијата на гранична вредност на нуза се бара почнувајќи од некој n_0 сите членови на низата да се во ε -околината на границата a . За разлика од тоа во дефиницијата на точка на натрупување не се бара сите членови да се во ε -околината, туку таму да има бесконечно многу членови на низата. Се разбира, и надвор од ε -околината може да има бесконечно многу членови на дадената низа. Притоа ако реалниот број a е гранична вредност на низата, тогаш a е единствена точка на натрупување на таа низа.

Конвергентни низи

Ако за низата (a_n) имаме дека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, тогаш велиме дека таа се стреми кон бројот a кога n се стреми кон ∞ и пишуваме $a_n \rightarrow a$, кога $n \rightarrow \infty$, а за самата низа (a_n) велиме дека е **конвергентна**. Со други зборови, низата (a_n) се стреми кон бројот a кога n се стреми кон ∞ , ако членовите a_n се „произволно блиску“ до бројот a кога n е „доволно големо“.

Од дефиницијата и својствата на апсолутна вредност на реален број следува дека неравенството

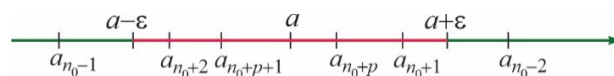
$$|a_n - a| < \varepsilon$$

во дефиницијата за гранична вредност на низа е еквивалентно со двојното неравенство $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, односно условот

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ вообичаено се нарекува ε -околина на бројот a . Според тоа дефиницијата за граница на низа може да ја толкуваме на следниот начин:

Низата (a_n) се стреми кон бројот a ако за произволен позитивен број ε постои природен број n_0 , така што $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ за секој природен број $n \geq n_0$.



Цртеж 3

Тогаш велиме дека почнувајќи од n_0 сите членови на низата се наоѓаат во ε – околината на бројот a , што значи дека сите членови на низата, освен конечно многу членови, се наоѓаат во ε – околината на бројот a (цртеж 3).

Пример 2. Низата со општ член $a_n = c$, каде што c е реален број, конвергира кон бројот c . Навистина, во овој случај за било кое $\varepsilon > 0$, бараниот број n_0 е 1.

Пример 3. Ќе докажеме дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Навистина, за секој позитивен број ε постои природен број n_0 , така што $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, односно $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Тогаш имаме дека

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ за секој природен број } n \geq n_0.$$

Притоа, за $\varepsilon = \frac{1}{100}$, од неравенството $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ следува дека $n > 100$. Според тоа, 100 члена од низата се надвор од интервалот $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$.

Пример 4. Ќе докажеме дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

За секој позитивен број ε постои природен број n_0 , така што $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Тогаш

$$|a_n - a| = \left| \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ за секој } n \geq n_0.$$

Дивергентни низи

Да се навратиме на дефиницијата за гранична вредност на низа. Ако за низата реални броеви (a_n) не постои граница, тогаш велиме дека низата **дивергира**. Значи, низата (a_n) дивергира ако за кој било реален број a постои ε – околина на бројот a таква што бесконечно многу членови на низата се надвор од околината, и тогаш низата нема граница.

Пример 5. Низата 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... не конвергира кон ниту еден реален број. Интуитивно може да кажеме дека оваа низа се стреми кон бесконечност. Причината за тоа е следната. Било колку голем број M да избериме, ќе постои број n_0 којшто зависи од M , така што ако $n > n_0$, тогаш ќе важи $a_n > M$. За нашата низа $a_n = n$, бројот n_0 лесно се определува. На пример, за $M = 100$, $n_0 = 101$, ако $M = 1000$, $n_0 = 1001$, итн.

Ако за секој реален број M постои природен број n_0 , така што

$$a_n > M, \text{ за секој } n \geq n_0$$

тогаш велиме дека низата (a_n) **се стреми кон бесконечност** и пишуваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

Значи, имаме дека

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M).$$

Аналогно, ако за секој реален број M постои природен број n_0 , така што

$$a_n < M, \text{ за секој } n \geq n_0$$

тогаш велиме дека низата (a_n) **се стреми кон минус бесконечност** и пишуваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Значи, имаме дека

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{R})(n \geq n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

Пример 6. На пример низата со општ член $a_n = -\sqrt{n}$ се стреми кон $-\infty$.

Во случај кога $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, велиме дека соодветните низи се дивергентни, бидејќи не конвергираат кон некој реален број.

Пример 7. Низата $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ со општ член $a_n = (-1)^n$ нема граница.

Навистина, бројот 1 не може да биде граница на дадената низа, бидејќи членовите со парен индекс не можат да припаѓаат во некоја мала околина, на пример за $\varepsilon = 1$, на бројот 1 .

Аналогно и бројот -1 не може да биде граница на дадената низа, бидејќи членовите со непарен индекс не можат да припаѓаат во некоја мала околина, на пример за $\varepsilon = 1$, на бројот -1 .

Било кој број a што е поголем од 1 не може да биде граница бидејќи ако земеме $\varepsilon = a - 1 > 0$, тогаш ниту еден член од низата не припаѓа на ε -околина на бројот a .

Било кој број a што е помал од -1 не може да биде граница бидејќи ако земеме $\varepsilon = -1 - a > 0$, тогаш ниту еден член од низата не припаѓа на ε -околина на бројот a .

Било кој број a што е поголем од -1 а помал од 1 не може да биде граница на низата, бидејќи ако земеме за ε да е помалиот од броевите $1 - a$ и $a - (-1) = a + 1$, тогаш ниту еден член од низата не припаѓа на ε -околина на бројот a (направи цртеж).

Значи ниту еден реален број не може да биде граница на дадената низа, па дадената низа нема граница.

Задачи

1. Дадена е низа со општ член $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Покажи дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, а потоа најди го n_0 , ако

а) $\varepsilon = \frac{1}{10}$;

б) $\varepsilon = \frac{1}{100}$;

в) $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

2. Која од следниве низи се стреми кон $+\infty$ или кон $-\infty$, а која кон реален број?

а) $a_n = n - 4$;

б) $a_n = \frac{n^2 - 1}{2n^2}$;

в) $a_n = 2 - n^2$.

3. Дадена е низа со општ член $a_n = \frac{n+1}{3n+4}$. Покажи дека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$. Почнувајќи од кое n , бесконечно многу членови на низата се наоѓаат во интервалот $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{100}, \frac{1}{3} + \frac{1}{100}\right)$?

4. Дали низата 1, 2, 5, 1, 2, 5, 1, 2, 5, 1, 2, 5, ... има граница?

5. Ако низата (a_n^2) има граница 1, покажи со пример дека низата (a_n) може, а и не мора да има граница.

9.10. Пресметување на граница на конвергентни низи

Во множеството од низи од реални броеви ќе ги дефинираме следните операции.

Ако (a_n) и (b_n) се две дадени низи, тогаш низата $(a_n + b_n)$ се нарекува **збир** на низите (a_n) и (b_n) , низата $(a_n - b_n)$ се нарекува **разлика** на низата (a_n) со низата (b_n) , низата $(a_n b_n)$ се нарекува **производ** на низите (a_n) и (b_n) . Ако $b_n \neq 0$, за секој природен број n , тогаш низата $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ се нарекува **количник** на низата (a_n) со низата (b_n) .

Следното својство дава одговор на прашањето дали од конвергенцијата на низите (a_n) и (b_n) следува конвергенција на збирот, разликата, производот и количникот на низите.

Ако (a_n) и (b_n) се конвергентни низи и ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, тогаш:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c a$, за секој реален број c

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab$

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$, ако $b_n \neq 0$, за секој природен број n и $b \neq 0$.

Пример 1. Границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 5}{2n^2 - 3n + 4}$ ја наоѓаме на следниов начин:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 5}{2n^2 - 3n + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Да докажеме дека ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, тогаш $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Навистина, заради својството в) имаме $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^k = a^k$.

Пример 3. Да докажеме дека ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $a_n \geq 0$, за секој природен број n , тогаш $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Навистина, нека ε е произволен позитивен број. Од $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ следува дека за $\varepsilon\sqrt{a}$ постои природен број n_0 така што $|a_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$, за секој природен број $n \geq n_0$. Оттука следува дека

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon, \text{ за секој природен број } n \geq n_0$$

од каде што заклучуваме дека $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Задачи

Најди ги следните граници:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 3n - 5}{9n^2 + 2n + 4}. \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n + 5}{3n^3 + 2n^2 + 1}. \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+3)(2n+1)(n-6)}{n^3}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 6n - 7}{2n^2 - n + 2} \right)^4. \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^2 + 2} - \frac{n^2}{n-1} \right). \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - (2n-1)^2}{(3n+2)^2 - (3n-2)^2}.$$

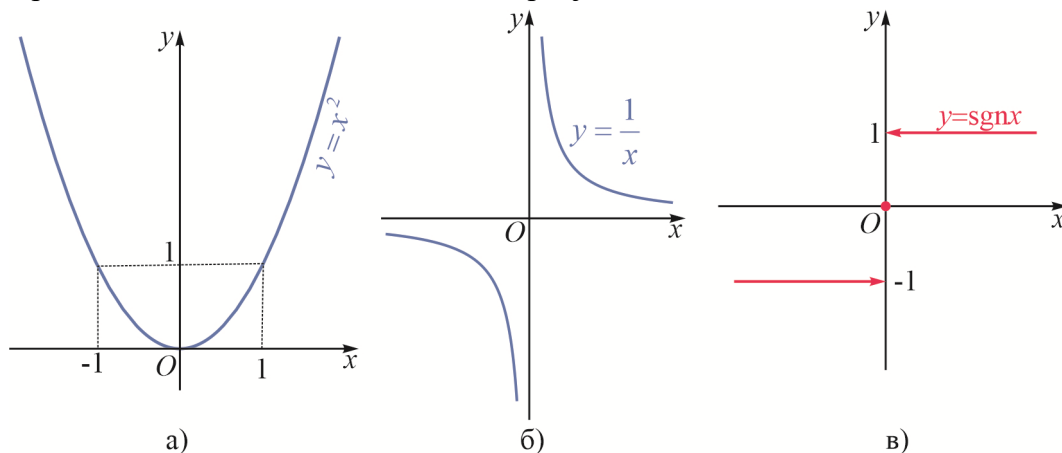
$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n+1} - \sqrt{3n}). \quad 9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4}}{\sqrt[3]{n^3 + 5n^2}}.$$

9.11. Непрекинатост на функција

Најнапред ќе разгледуваме некои графици на функции со кои сме се сретнале порано. На цртеж 1 се прикажани графици на функциите

$$y = x^2, \quad y = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

Се поставува прашањето дали графикот на секоја од дадените функции може да го нацртаме без да го подигнеме моливот од хартијата, односно со непрекинато движење на моливот по хартијата?



Цртеж 1

Функцијата $y = x^2$ (цртеж 1 а)) може да се нацрта со еден потег, па велиме дека таа е **непрекинатата** или дека е непрекината во секоја точка. При цртањето на графикот на функцијата $y = \frac{1}{x}$ (цртеж 1 б)) моливот мора да се одвои од хартијата за да го нацртаме графикот за вредностите $x \neq 0$. Може да се каже дека функцијата $y = \frac{1}{x}$ е непрекината во секоја точка од интервалот $(-\infty, 0)$ и во секоја точка од интервалот $(0, +\infty)$, додека во точката $x = 0$ функцијата не е дефинирана. Исто така, може да се каже дека функцијата $y = \operatorname{sgn} x$ (цртеж 1 в)) е непрекината во секоја точка од интервалот $(-\infty, 0)$ и во секоја точка од интервалот $(0, +\infty)$, додека во точката $x = 0$ не е непрекината.

Да го дефинираме поимот за непрекинатост на функција попрецизно.

Нека функцијата f е дефинирана на интервалот (a, b) и нека $x_0 \in (a, b)$. За функцијата f велиме дека е **непрекинатата** во точката x_0 , ако за секој позитивен број ε постои позитивен број δ , таков што за секој $x \in (a, b)$ за кое е исполнето неравенството $|x - x_0| < \delta$, важи неравенството $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Од дефиницијата за непрекинатост непосредно следува дека за секоја ε -околина $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ на точката $f(x_0)$, постои соодветна δ -околина $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на точката x_0 која со функцијата f се пресликува во околината $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Пример 1. Да докажеме дека функцијата $f(x) = 3x + 1$ е непрекината во точката $x = 1$.

Навистина, нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Тогаш за секој реален број x таков што $|x - 1| < \delta$ важи

$$|f(x) - f(1)| = |3x + 1 - 4| = 3|x - 1| < 3 \cdot \delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Пример 2. Функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ е непрекината во точката $x = 2$.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Избираме $\delta = \sqrt{2}\varepsilon$. Тогаш за секој ненегативен реален број x таков што $|x - 2| < \delta$ важи

$$\begin{aligned} |f(x) - f(2)| &= |\sqrt{x} - \sqrt{2}| = \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \right| = \\ &= \frac{|x - 2|}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \leq \frac{|x - 2|}{\sqrt{2}} < \frac{\delta}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

На сличен начин може да се докаже дека функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ е непрекината во произволна точка $x_0 > 0$. Дискусијата за непрекинатост на функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ во точката $x = 0$ нема смисла бидејќи точката $x = 0$ не е внатрешна точка од дефиниционата област на функцијата. Во таквите гранични точки можеме да зборуваме за **непрекинатост одлево (оддесно)**. Имено, ако условот $|x - x_0| < \delta$ го замениме со $-\delta < x - x_0 \leq 0$ ($0 \leq x - x_0 < \delta$), тогаш за функцијата f велиме дека е непрекината одлево (оддесно) во точката x_0 . Во таа смисла функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ е непрекината оддесно во точката $x = 0$.

Може да докажеме непрекинатост во секоја точка од дефинициона област и на елементарните функции: степенски, експоненцијални, логаритамски и тригонометриски (иако таа постапка не мора секогаш да биде едноставна како погорните примери). Во случај на посложени функции ќе ги користиме следните својства.

1⁰. Ако функциите f и g се непрекинати во точката x_0 , тогаш во таа точка се непрекинати и функциите $f \pm g$, kf ($k \neq 0$), fg и $\frac{f}{g}$ (при услов $g(x_0) \neq 0$).

2⁰. Ако функцијата g е непрекината во точката $x = x_0$, и функцијата f е непрекината во точката $y_0 = g(x_0)$, тогаш и сложената функција $f \circ g$ е непрекината во точката $x = x_0$.

Пример 3. Функцијата $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ е непрекината за секој реален број x .

Функцијата $f_1(x) = x$ е непрекината за секој реален број x_0 . Навистина, за произволно $\varepsilon > 0$ избираме $\delta = \varepsilon$. Тогаш за секој реален број x , таков што $|x - x_0| < \delta$, имаме

$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

Потоа со примена на својството 1^0 може да заклучиме дека се непрекинати и функциите $f_2(x) = x^2$ и $f_3(x) = x^3$. Бидејќи константната функција е непрекинатата (доказот на овој факт е едноставен), имаме дека и функцијата $g(x) = 5$ е непрекинатата. На крајот, применувајќи го својството 1^0 на функциите $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ и $g(x) = 5$, добиваме дека функцијата $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ е непрекинатата за секој реален број x_0 .

Пример 4. Најди го множеството на точки во кои функцијата $f(x) = \frac{1}{x-1}$ е непрекинатата.

Бидејќи функцијата $g(x) = x - 1$ е непрекинатата, со примена на својството 2^0 заклучуваме дека функцијата $f(x) = \frac{1}{x-1}$ е непрекинатата за секој $x \neq 1$.

Задачи

1. Докажи дека функцијата $f(x) = x^2$ е непрекинатата во точката $x = 3$.

2. Докажи дека функциите $y = x^3$ и $y = x^4$ се непрекинати во произволна точка.

3. Објасни зошто следните функции се непрекинати во назначените вредности на x :

а) $y = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$;

б) $y = e^x + 2x$;

в) $y = \ln(x+1)$, $x > -1$;

г) $y = x^2 e^x$.

4. Најди ги точките на прекин на следните функции:

а) $y = \frac{x}{(x+1)^2}$;

б) $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$;

в) $y = \frac{x-3}{x^2-1}$.

9.12. Гранична вредност на функција

Поим за гранична вредност на функција

Пред да ја воведеме дефиницијата за гранична вредност на функција, ќе го разгледаме следниов пример.

Пример 1. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

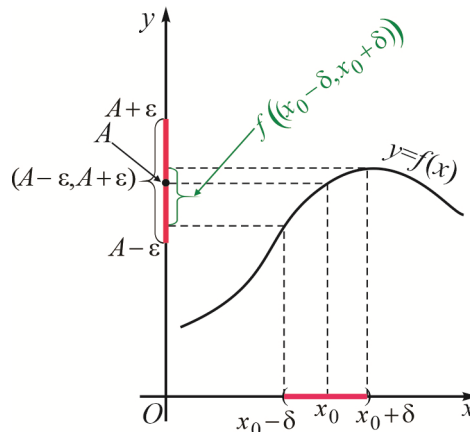
која е дефинирана за секој реален број x , освен за $x = 2$. Со непосредно пресметување може да заклучиме дека кога вредностите на променливата x малку се разликуваат од бројот 2, тогаш вредностите на функцијата $f(x)$ се приближуваат до бројот 4. Исто така, забележуваме дека за $x \neq 2$, важи

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2,$$

па имаме дека $f(x) \approx 2+2=4$ кога $x \approx 2$.

Нека функцијата f е дефинирана на интервал (a,b) што ја содржи точката x_0 освен, можеби во точката x_0 . Реалниот број A се нарекува **гранична вредност** или **граница** на функцијата f кога x се стреми кон x_0 , ако за секој позитивен број ε постои позитивен број δ , таков што за секој $x \in (a,b)$ (освен можеби за x_0) за кои е исполнето неравенството $|x - x_0| < \delta$ важи неравенството $|f(x) - A| < \varepsilon$. Тогаш пишуваме

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$



Цртеж 1

Од самата дефиниција непосредно следува дека функцијата f има гранична вредност A кога x се стреми кон x_0 , ако за секоја ε — околина на точката A постои δ — околина на точката x_0 , така што за секој $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ важи $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Дефиницијата за граница на функција може и геометриски да се интерпретира. На цртеж 1 е претставен графикот на функцијата f дефинирана во некоја околина на точката x_0 . За $\varepsilon > 0$ цртаме лента ограничена со правите $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. Соодветниот број δ треба да биде таков што делот од графикот на функцијата на интервалот $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да се содржи во претходно нацртаната лента (освен, можеби, точката $(x_0, f(x_0))$).

Пример 2. Докажи дека $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$. Колку изнесува δ , за $\varepsilon = \frac{1}{100}$?

За $\varepsilon > 0$ избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогаш за секој број x , таков што $|x - 3| < \delta$,

$$\text{имаме } |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ако $\varepsilon = \frac{1}{100}$, тогаш $\delta = \frac{1}{200}$.

Пример 3. Докажи дека $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Нека $\varepsilon > 0$ е дадено. Избираме $\delta = \varepsilon$. Тогаш за секој реален број $x \neq 3$, таков што $|x - 3| < \delta$, имаме

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |(x + 3) - 6| = |x - 3| < \delta = \varepsilon.$$

Да забележиме дека во овој случај дадената функција не е дефинирана во точката $x = 3$.

Во практика не секогаш пресметуваме граница на функција како во претходните примери, туку работиме по скратена постапка. Имено, од дефиницијата за непрекинатост на функција, ако функцијата f е непрекината функција во точката x_0 , тогаш $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. И обратно, ако $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, тогаш

функцијата f е непрекината во точката x_0 . Врз основа на ова својство на непрекинатите функции, лесно може да се пресмета граничната вредност на непрекината функција во некоја точка. На пример, бидејќи функцијата $y = x^2 - 1$ е непрекината во секоја точка, имаме $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3$. Меѓутоа, ако грани-

цата на функција се сведува на облик $\frac{0}{0}$, како во претходниот пример бидејќи

$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$, тогаш именителот и броителот претходно ги скратуваме, а потоа бараме гранична вредност.

Пример 4. Пресметај $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

$$\text{Ако } x \neq 0, \text{ тогаш } \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1},$$

од каде што наоѓаме дека

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

бидејќи $\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$ е непрекината за $x = 0$.

Пример 5. а) Да ја пресметаме границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x}$.

Заради $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ добиваме

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} ((1+x) - 1)((1+x)^2 + (1+x) + 1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^2 + (1+x) + 1) = 3.$$

б) Аналогно на а) за границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$, каде n е природен број,

користејќи го идентитетот

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

се добива дека

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} ((1+x) - 1)((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} ((1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \dots + (1+x) + 1) = n. \end{aligned}$$

Пример 6. а) За границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

ако ги помножаме броителот и именителот со изразот $(\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1$ и го искористиме идентитетот наведен во претходниот пример, ќе добиеме

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x} - 1)((\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1)}{x((\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x((\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x((\sqrt[3]{1+x})^2 + (\sqrt[3]{1+x}) + 1)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

б) Аналогно како во а) за границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$$

каде n е природен број, со множење на броителот и именителот со изразот

$$(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{1+x}) + 1$$

добиваме

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x} - 1)((\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{1+x}) + 1)}{x((\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{1+x}) + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x((\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \dots + (\sqrt[n]{1+x}) + 1)} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Пресметување на гранични вредности на функции

За пресметување на гранични вредности често ги користиме следните својства на граничните вредности.

Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, тогаш важи

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Значи, граница од збир (разлика, производ или количник) на две функции е еднаква на збирот (разликата, производот или количникот) од границите на тие функции.

Пример 7. Најди ја граничната вредност $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x^3-1} \right)$.

Бидејќи

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \quad \text{и}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3},$$

заради погорното својство имаме дека

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}.$$

Пример 8. Најди ја границата $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right)$.

Во овој случај не може да го погорното својство бидејќи не постојат граничните вредности на собироците. Заради тоа ќе го трансформираме изразот на следниот начин (имајќи предвид дека $x \neq 1$):

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{x^2+x+1-3}{x^3-1} = \frac{x^2+x-2}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Според тоа, добиваме дека

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1.$$

Пример 9. Најди $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1}$.

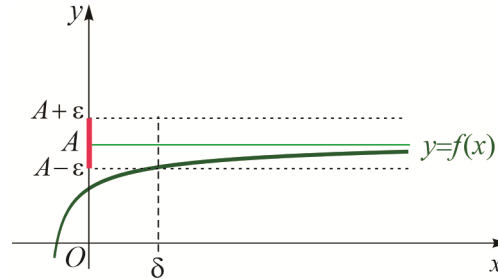
По делење на броителот и именителот со x , со примена на својството 1⁰ и задача 5, добиваме дека

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}}{\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Проширување на поимот за гранична вредност

Гранична вредност на функција кога аргументот се стреми кон бесконечност. Нека функцијата f е дефинирана на интервал $(a, +\infty)$. Ако за секој $\varepsilon > 0$ постои број $\delta > a$ таков што за секој $x > \delta$ важи $|f(x) - A| < \varepsilon$, тогаш бројот A се вика гранична вредност на функцијата кога $x \rightarrow +\infty$ и запишуваме

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ (цртеж 2).}$$



Цртеж 2

Пример 10. Докажи дека $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

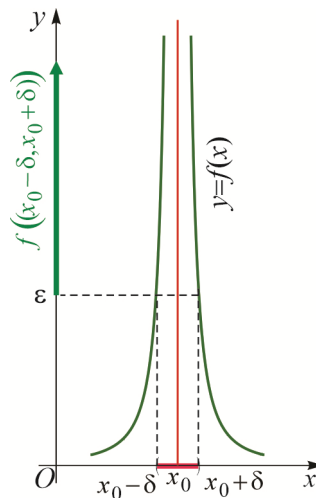
Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Избираме $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогаш за секој $x > \delta$ имаме $\left|\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$.

Слично, се дефинира и граничната вредност $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ кога $x \rightarrow -\infty$.

Бесконечна гранична вредност.

а) Нека функцијата f е дефинирана на интервал (a, b) што ја содржи точката x_0 освен, можеби во точката x_0 . Ако за секој $\varepsilon > 0$, постои број $\delta > 0$, такво што за секој $x \in (a, b)$ (освен можеби за x_0) за кои е исполнето неравенството $|x - x_0| < \delta$ важи неравенството $f(x) > \varepsilon$, тогаш велиме дека функцијата f се стреми кон $+\infty$ кога $x \rightarrow x_0$ и запишуваме

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ (цртеж 3).}$$



Цртеж 3

Пример 11. Докажи дека $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Избираме $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогаш за секој $x \neq 1$ такво што $0 < |x - 1| < \delta$, важи неравенството $\frac{1}{(1-x)^2} > \frac{1}{\delta^2} = \varepsilon$.

Аналогно се дефинира и граничната вредност $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

б) Нека функцијата f е дефинирана на интервал $(a, +\infty)$. Ако за секој $\varepsilon > 0$, постои $\delta > a$, такво што за секој $x > \delta$ важи неравенството $f(x) > \varepsilon$, тогаш се вели дека функцијата f се стреми кон $+\infty$ кога $x \rightarrow +\infty$ и запишуваме

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Пример 12. Докажи дека $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно дадено. Избираме $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Тогаш за секој $x > \delta$ важи неравенството $|x^2| > \delta^2 = \varepsilon$.

Аналогно се дефинираат границите

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Задачи

1. Користејќи ја дефиницијата за граница на функција, докажи дека:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3;$ **б)** $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5;$ **в)** $\lim_{x \rightarrow -1} (5x - 3) = -8.$

г) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 9x = 3;$ **г)** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3};$ **д)** $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x - 4} = 0.$

2. Докажи дека $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8$. Колку треба да биде бројот δ за $\varepsilon = \frac{1}{1000}$?

3. Најди ги следниве граници:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4};$ **б)** $\lim_{x \rightarrow 0,1} -5;$ **в)** $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \log_2 3.$

4. Најди ги следниве граници:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2;$ **б)** $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (6x - 1);$ **в)** $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x + 2}.$

5. Пресметај ги следниве гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x(x-1)}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^3+1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - 1}{x^4 - 1}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 5x + 3}$.

Најди ги следниве граници:

6. а) $\lim_{x \rightarrow -2} (7x+1)$;

б) $\lim_{x \rightarrow -2} (x+4)^2$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$.

7. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$.

8. а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{3x^3 + 2x^2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

9. а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 6}{x + 3}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 7x + 6}$.

10. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{2x^2 - 12x + 16}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 9x + 6}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 7x - 11}{x^2 + 9x - 10}$.

11. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{1 - \sqrt{x-1}}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{5-x^2} - 2}$.

12. а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - 4x + 3}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$.

13. Пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{3x-2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+2x-x^2}{2x^2-x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{x^2+2} \right)$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{1+x^4}$;

д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1}$;

е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x^3}{1-x^2}$.

14. Пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$;

д) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x)$;

е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$.

9.13. Специјални гранични вредности

Овде ќе наведеме неколку гранични вредности кои не се очигледни, но често се јавуваат при решавањето на различни типови на задачи. Некои нивни примени кај пресметувањето на други гранични вредности ќе бидат прикажани во примерите кои следуваат.

$$1^0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$2^0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$3^0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$4^0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad (\alpha \neq 0)$$

Пример 1. Пресметај ги следните гранични вредности:

$$\text{а)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{4}};$$

$$\text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}};$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x;$$

$$\text{г)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{2x};$$

$$\text{д)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}(e^x - 1);$$

$$\text{е)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x}.$$

Имаме дека **а)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{4}} = e$, каде што ја применивме границата 1^0 и

фактот дека $x \rightarrow \infty$ повлекува дека $\frac{x}{4} \rightarrow \infty$.

$$\text{б)} \quad \text{Имаме } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}} = e.$$

$$\text{в)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{9}}\right)^{\frac{x}{9} \cdot 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{9}}\right)^{\frac{x}{9}}\right)^9 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{9}}\right)^{\frac{x}{9}}\right)^9 = e^9.$$

$$\text{г)} \quad \text{Бидејќи } \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{2x} = \left[\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{4x}{x-1}}, \text{ со смената } \frac{2}{x-1} = y, \text{ (поради}$$

$x \rightarrow \infty \Leftrightarrow y \rightarrow 0$) имаме дека

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e, \text{ додека } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-1} = 4.$$

Оттука имаме дека $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{2x} = e^4$.

Напомнуваме дека овде го користевме следното правило:

Ако $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ (A и B се конечни броеви), тогаш

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = A^B$$

што следува равенството $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ и непрекинатоста на функциите e^x и $\ln x$.

д) Имаме дека $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (e^x - 1) = \ln e = 1$ заради резултатот 3^0 за $a = e$.

ѓ) Ако во броителот на изразот го одземеме и додадеме бројот 1, а потоа ја примениме границата 4^0 , добиваме

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1 - (\sqrt{1+x} - 1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Задачи

1. Пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$; **б)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$; **г)** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{3x^2}$.

2. Пресметај ги следните гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x}$; **б)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$; **в)** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}$; **д)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{3x} - 1}{x}$; **ѓ)** $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$.

3. Најди ги следните гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{3 - 4x + x^4}$; **б)** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$;

в) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$; **г)** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$.

9.14. Асимптоти на функција

При скицирање и цртање на графици на функции, особено е корисно ако претходно се најдат асимптотите на функцијата. Асимптотите кај графикот се всушност прави во рамнината, кон кои дел од графикот на функцијата, односно некое подмножество на точки $(x, f(x))$, се стреми кон некоја права n , кога точката $(x, f(x))$ се оддалечува кон бескрајност од координатниот почеток. Овде под терминот „се стреми“ се подразбира дека граничната вредност на растојанието од точките со координати $(x, f(x))$ до дадената права n е еднаква на нула.

Во зависност од тоа каква е взаемната положба на правата со координатните оски, разликуваме три вида на асимптоти:

- хоризонтална асимптота, ако правата n е паралелна со x -оската,
- вертикална асимптота, ако правата n е паралелна со y -оската,
- коса асимптота, ако правата n не е паралелна со x -оската и не е паралелна со y -оската. Притоа, дозволено е графикот да ја сече правата n во конечно многу точки или бесконечно многу точки. Исто така еден график може да има и повеќе асимптоти.

Правите кои се паралелни со x -оската имаат равенки од облик $y = b$. Притоа, правата $y = b$ е **хоризонтална асимптота** на функцијата f , ако важи барем еден од двата услови:

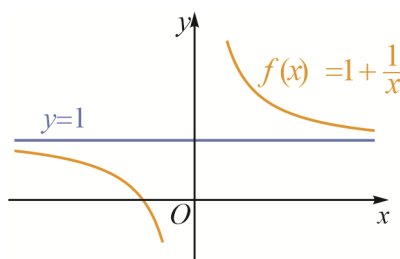
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Ако важи првиот услов, тогаш десната „гранка“ на графикот се стреми кон правата $y = b$, а ако важи вториот услов, тогаш левата „гранка“ на графикот се стреми кон правата $y = b$. Но можно е левата гранка на графикот да се стреми кон една (хоризонтална) права, а десната гранка се стреми кон друга (хоризонтална) права.

Пример 1. Нека е дадена функцијата $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Бидејќи

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$$

добиваме дека правата $y = 1$ е хоризонтална асимптота (цртеж 1).



Цртеж 1

Пример 2. Функциите

$$y = 1 + \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{и} \quad y = 1 - \frac{x}{x^2 + 2}$$

имаат хоризонтална асимптота $y = 1$, бидејќи за сите нив важи $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 1$.

Но тие се разликуваат по тоа што графикот на првата функција се наоѓа над асимптотата за големи вредности на x , графикот на втората функција се наоѓа под асимптотата.

Пред исцртувањето на графикот пожелно е да видиме каков е знакот (+ или -) на разликата $f(x) - b$ за доволно големи вредности на x и доволно мали вредности на x . Притоа,

- ако постои реален број $M > 0$ таков што $f(x) - b > 0$ за секое $x > M$, тогаш графикот на функцијата е над асимптотата;
- ако постои реален број $M < 0$ таков што $f(x) - b > 0$ за секое $x < M$, тогаш графикот на функцијата е над асимптотата;
- ако постои реален број $M > 0$ таков што $f(x) - b < 0$ за секое $x > M$, тогаш графикот на функцијата е под асимптотата;
- ако постои реален број $M < 0$ таков што $f(x) - b < 0$ за секое $x < M$, тогаш графикот на функцијата е под асимптотата.

Знаеме дека правите кои се паралелни со y -оската имаат равенки од облик $x = a$. Велиме дека правата $x = a$ е **вертикална асимптота** на функцијата f , ако важи барем еден од четирите услови

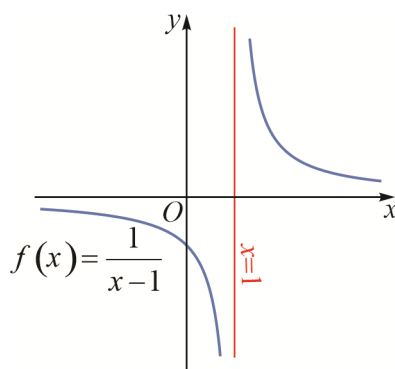
$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty.$$

Притоа знакот (+ или -) после a укажува дали x се стреми кон a од десно ($a+$) или од лево ($a-$). Притоа, кога x се стреми кон a и од лево и од десно, функцијата се стреми кон $+\infty$ или $-\infty$, што значи можни се четири случаи.

Пример 3. Нека е дадена функцијата $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Бидејќи

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

заклучуваме дека правата $x = 1$ е вертикална асимптота на функцијата (цртеж 1).



Цртеж 2

Правите кои не се паралелни со x -оската и не се паралелни со y -оската имаат равенки од облик $y = kx + n$, каде $k \neq 0$. Притоа може да се покаже дека правата

$$y = kx + n, (k \neq 0)$$

е **коса асимптота** на функцијата f , ако и само ако границите

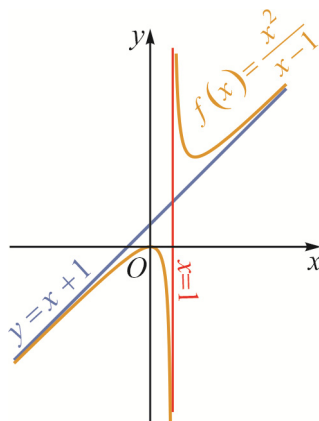
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

постојат и се конечни. Исто како и кај хоризонталните асимптоти и тука може да пресметуваме независно гранични вредности кога $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ и да заборуваме за коса асимптота од лево и од десно. Исто така и овде е пожелно да видиме каков е знакот на разликата $f(x) - kx - n$. Ако тој е позитивен, графикот е над асимптотата, а ако е негативен, графикот е под асимптотата.

Пример 4. Нека е дадена функцијата $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Бидејќи

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \quad \text{и} \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = 1$$

функцијата има коса асимптота $y = x + 1$. Покрај тоа, правата $x = 1$ е вертикална асимптота (цртеж 3).



Цртеж 3

Задачи

Најди ги асимптотите на следните криви:

1. а) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$; б) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$; в) $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^5 + 1}$.

2. а) $f(x) = e^x$; б) $f(x) = e^x + e^{-x}$; в) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

3. За која вредност на параметарот k , функцијата $f(x) = \frac{2x^k + x + 1}{x + 2}$

има коса асимптота?

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Определи ги дефиниционите области на следниве функции:

а) $f(x) = \sqrt[4]{3-x} + \sqrt{x+1}$; б) $f(x) = \log(16-x^2) + \frac{1}{1-\log x}$.

2. Испитај ја монотоноста на следните функции:

а) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $x \in [1, \infty)$; б) $f(x) = x + \log x$;

в) $f(x) = 2^{x+3}$; г) $f(x) = 2x + e^{x+1}$.

3. Определи ги пресечните точки на графикот на секоја од следните функции со x – оската:

а) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + x + 1}$; б) $f(x) = \ln(x^2 - 8)$; в) $f(x) = e^{3x-3}$.

4. Одреди ја вредноста на параметарот k во функцијата:

а) $f(x) = (2k+3)x + 3$, ако таа монотонно расте;

б) $f(x) = (-5k+1)x + 1$, ако таа монотонно опаѓа.

5. Најди ги координатите на темињата, интервалите на монотоност и множеството вредности на следните квадратни функции:

а) $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$; б) $f(x) = -3x^2 - 6x - 10$; в) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.

6. Нацртај ги графиците на следните квадратни функции:

а) $f(x) = (x-3)^2$; б) $f(x) = -\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$; в) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$.

7. Наведи некои од својствата на следниве функции:

а) $f(x) = x^6$; б) $f(x) = x^9$; в) $f(x) = \frac{1}{x^8}$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^5}$; д) $f(x) = \sqrt[4]{x^5}$; е) $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$.

8. Нацртај ги во ист координатен систем графиците на функциите

$f(x) = 10^x$, $f(x) = 10^{-x}$, $f(x) = -10^x$, $f(x) = -10^{-x}$.

9. Нацртај ги во ист координатен систем графиците на функциите

$f(x) = \lg x$, $f(x) = \log(-x)$, $f(x) = -\log(x)$, $f(x) = -\log(-x)$.

10. Најди ја инверзната функција на секоја од следните функции:

а) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{4}$; б) $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$; в) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$; г) $f(x) = 10^{x-2} + 3$.

11. Запиши ги првите четири члена на низата со општ член a_n , ако:

а) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; б) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$; в) $a_n = \frac{1}{n!}$.

12. Дадена е низа со општ член $a_n = \frac{2n-1}{n+3}$. Покажи дека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Почнувајќи од кое n , бесконечно многу членови на низата се наоѓаат во интервалот $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}, \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right)$?

13. Покажи дека следните низи се дивергентни:

а) $a_n = (-1)^n n$; **б)** $a_n = 1^n + (-1)^n$; **в)** $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

14. Покажи дека низата со општ член a_n е ограничена, ако:

а) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$; **б)** $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$; **в)** $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2+4n+8}$.

Најди ги следниве граници:

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1}$. **16.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{5n+3}$.

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+7}{n^2+2n-1}$. **18.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n-5}}$. **20.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2-5n+6} - n$.

21 Пресметај ги следниве гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1)$; **б)** $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 1}$;
в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3}$; **г)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;
д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-1}$; **е)** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2-a^2}{\sqrt{x-1}-\sqrt{a-1}} \quad (a > 1)$.

22. Пресметај ги следниве гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; **б)** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; **в)** $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1+x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$.

23. Пресметај ги следниве гранични вредности:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$; **б)** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2-x+16}$; **в)** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4-13x^2+36}{x^3-27}$.

Пресметај ги границите:

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^x$. **25.** $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$. **26.** $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$. **27.** $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

28. Најди ги асимптотите на следните функции:

а) $f(x) = \frac{x}{x-2}$; **б)** $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$; **в)** $f(x) = x+1+\frac{1}{x^2}$; **г)** $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$;
д) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$; **е)** $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x^2)}$; **ж)** $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$; **з)** $f(x) = xe^{-x}$.

ОДГОВОРИ, УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 1

1.1.

1. Системи од линеарна и квадратна равенка со две непознати се: а), б) и д).

2. а) Да; б) Не; в) Не. 3. а) Е решение; б) Не е решение; в) Е решение; г) Не е решение.

$$4. \text{ а) } \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}; \text{ б) } \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 12 \\ x^2 + \sqrt{2}xy - y^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}; \text{ в) } \begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ x^2 + 2z^2 - x + 3z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases};$$

$$\text{ г) } \begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + xy + 3y^2 + x - 1 = 0 \end{cases}; \text{ д) } \begin{cases} -x + y - 10 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + \frac{37}{2} = 0 \end{cases}; \text{ ё) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \sqrt{3}y = 0 \\ x^2 + 3y = 0 \end{cases}.$$

5. а) $\{(3, 5), (5, 3)\}$; б) $\{(-3, -9), (3, 9)\}$;

в) $\left\{\left(\frac{-3 + \sqrt{105}}{4}, \frac{3 + \sqrt{105}}{6}\right), \left(\frac{-3 - \sqrt{105}}{4}, \frac{3 - \sqrt{105}}{6}\right)\right\}$; г) $\{(2, 1), (-14, 17)\}$;

д) $\left\{\left(\frac{76 + 4\sqrt{166}}{13}, \frac{36 + 6\sqrt{166}}{13}\right), \left(\frac{76 - 4\sqrt{166}}{13}, \frac{36 - 6\sqrt{166}}{13}\right)\right\}$.

6. Реални решенија имаат системите: а), г) и ё), а комплексни решенија имаат системите б), в) и д).

1.2.

1. а) Не, б) Да. 2. а) $(1, 3), (1, -3), (-1, 3)$ и $(-1, -3)$; б) $(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$.

3. а) $\left(1, \frac{25}{7}\right), \left(-1, \frac{1}{7}\right)$; б) $\left(\frac{6}{5}, -\frac{58}{25}\right), (-1, -1)$. 4. а) $(-3, 2), (3, 2)$; б) $(-1, 4), (1, 4)$.

5. а) $(2\sqrt{3} + \sqrt{6}, 2\sqrt{3} - \sqrt{6}), (2\sqrt{3} - \sqrt{6}, 2\sqrt{3} + \sqrt{6}), (\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, -\sqrt{6} - 2\sqrt{3}),$
 $(-\sqrt{6} - 2\sqrt{3}, \sqrt{6} - 2\sqrt{3})$; б) $(-2, 1), (-1, 2), (1, 2), (2, -1)$.

1.3.

1. $(2, 0), (0, 2), \left(\frac{1}{2}(-3 - i\sqrt{11}), \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{11})\right), \left(\frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{11}), \frac{1}{2}(-3 - i\sqrt{11})\right)$.

2. $(2, 1), (-2, -1), (-1, -2), (1, 2)$. 3. $(2, 1), (1, 1), (3, 3), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$. 4. $(2, 3), (-2, -3), (3, 2), (-3, -2)$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) $(1, 1)$ и $\left(-\frac{3}{7}, -\frac{13}{7}\right)$; б) $\left(-\sqrt{\frac{2302}{5}}, 24 - \sqrt{\frac{1151}{10}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{2302}{5}}, 24 + \sqrt{\frac{1151}{10}}\right)$.

2. а) $\left(-2 - i\sqrt{\frac{31}{2}}, 2 - i\sqrt{\frac{31}{2}}\right)$ и $\left(-2 + i\sqrt{\frac{31}{2}}, 2 + i\sqrt{\frac{31}{2}}\right)$; б) $(3, 9), (-3, -9)$.

$$3. \text{ а) } \left(-\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{105}}{4}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{35}}{2} \right) \text{ и } \left(-\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{105}}{4}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{35}}{2} \right);$$

$$б) \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \right) \text{ и } \left(\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \right).$$

4. Системот под а).

$$5. \text{ а) } (\sqrt{5}, \sqrt{5}), (-\sqrt{5}, -\sqrt{5}), (2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, \sqrt{2});$$

$$б) (4, 2), (-4, -2), \left(3\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}} \right); \left(-3\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}} \right).$$

$$6. \text{ а) } (1, 2), (-1, -2), \left(\frac{5}{2\sqrt{262}}, \frac{43}{2\sqrt{262}} \right), \left(-\frac{5}{2\sqrt{262}}, -\frac{43}{2\sqrt{262}} \right);$$

$$б) (3, 1), (-3, -1), (2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

7. Системот под а).

$$8. \text{ а) } (2, -1), (-1, 2), (-2, 1), (1, -2), \text{ б) } (1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1),$$

$$\text{ в) } (1, 3), (3, 1), \text{ г) } (2, 1), (1, 2), (1, -3), (-3, 1).$$

$$9. \text{ а) } (1, 3), (-1, -3), \left(\sqrt{\frac{19}{3}}, \sqrt{\frac{19}{3}} \right), \left(-\sqrt{\frac{19}{3}}, -\sqrt{\frac{19}{3}} \right);$$

$$б) (1, 1), (-1, -1), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5} \right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{5}}{5} \right).$$

$$10. \text{ а) } \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} \right), \left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2} \right),$$

$$\left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2} \right); \text{ б) } (\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (\sqrt{2}, -2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, -2\sqrt{3}).$$

$$11. \text{ а) } (-2, 1), (-1, 3); \text{ б) } (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{3}, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, -\sqrt{2}), (\sqrt{3}, \sqrt{2}).$$

$$12. \text{ а) } \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right), (0, 1); \text{ б) } (-\sqrt{2}, -1), (-\sqrt{2}, 1), (\sqrt{2}, -1), (\sqrt{2}, 1).$$

$$13. \text{ а) } \left(-3, -\frac{3}{2} \right), \left(\frac{9}{5}, \frac{9}{10} \right), \left(\frac{9}{14}(-1-\sqrt{15}), \frac{3}{14}(-1-\sqrt{15}) \right), \left(\frac{9}{14}(-1+\sqrt{15}), \frac{3}{14}(-1+\sqrt{15}) \right);$$

$$б) \left(-\frac{16}{7}, -\frac{8}{7} \right), (2, 1), \left(\frac{1}{4}(-1-\sqrt{65}), \frac{1}{4}(-1-\sqrt{65}) \right), \left(\frac{1}{4}(-1+\sqrt{65}), \frac{1}{4}(-1+\sqrt{65}) \right).$$

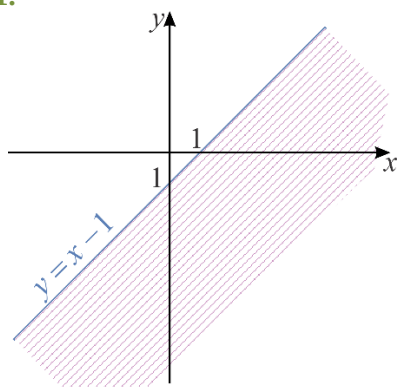
МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 2

2.1.

$$1. \{(k, k-1) | k \in \mathbb{R}\}. \quad 2. \left\{ \left(k, \frac{3-k}{6} \right) \mid k \in \mathbb{R} \right\}. \quad 3. \{(k, 28k+14) | k \in \mathbb{R}\}. \quad 4. x=3. \quad 5. x=-2.$$

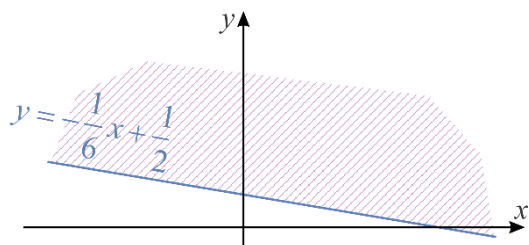
6. $\emptyset$. 8. $x=-2$. 10. y -оската. 11. Права паралелна со x оската и минува низ точката $(0, 4)$.

1.

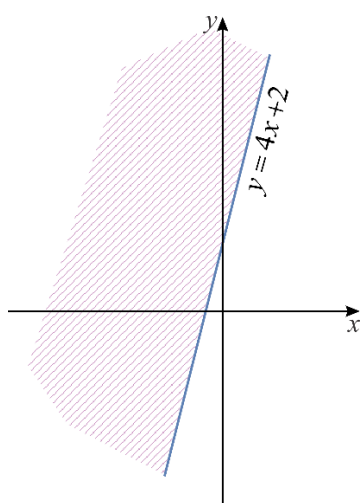


2.2.

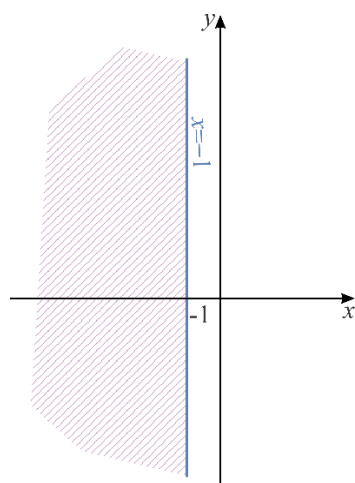
2.



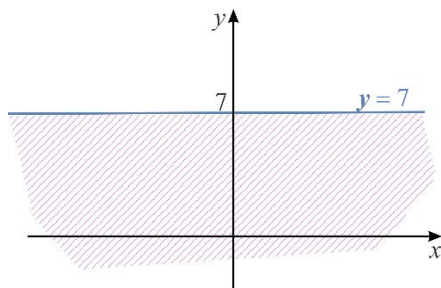
3.



4.



5.



2.4.

2. $z = 9$ за $x = 2, y = 3$; 3. $z = 30$ за $x = 0, y = 5$.

4. Најди ја најголемата вредност на функцијата $z = 5x + 3y$, ако важат ограничувањата $2x + 4y \leq 60$, $8x + 6y \geq 150$, $x \geq 0$ и $y \geq 0$ (x - количество од тоникот А, y - количество од тоникот В). Минимален трошок се постигнува за $x = 0$ и $y = 25$, а тој трошок ќе изнесува 75 евра.

5. Најди ја најголемата вредност на функцијата $z = 9x + 7y$, ако важат ограничувањата $0,6x + 0,4y \leq 80$, $0,4x + 0,66y \leq 100$, $0 \leq x \leq 60$ и $y \geq 0$ (x - количество на Премиум во килограми и y - количество Супер во килограми). Профитот е најголем и изнесува 1340 евра, ако се произведат $x = 40$ килограми Премиум и $y = 140$ килограми Супер.

6. Најди ја најголемата вредност на функцијата $z = 300x + 375y$, ако важат ограничувањата $10x + 10y \leq 7500$, $20x + 30y \leq 19500$, $x \geq 0$ и $y \geq 0$ (x - број на панталони од прв тип, y - број на панталони од втор тип). За да се добие максималната добивка од 258750 денари, треба да се произведат 300 пара панталони од првиот и 450 пара панталони од вториот тип.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

13. $z = 32, x = 2, y = 3$. 14. $z = \frac{45}{2}, x = \frac{3}{2}, y = \frac{9}{2}$. 15. в) $z = 16$ за $x = 0, y = 2$.

16. Најголемата вредност $z = 51$ се достигнува за $x = 6, y = 3$ а најмалата $z = 14$ се достигнува за $x = 0, y = 2$.

17. Најголемата вредност е $z = 95, x = 5, y = 30$, а најмалата $z = 74, x = 8, y = 22$.

18. Максималната заработка е 32 евра.

19. Максималниот број на риби со кои што езерото може да се пориби е 250.

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 3

3.1.

1. $G_5 = 3836,24$ евра, $K_5 = 1036,24$ евра. 2. 8193,8 денари. 3. 26699 денари.

4. 7,527%. 5. 5,66%. 6. Втората банка кредитира поповолно.

3.2.

1. $p = 6\%$. 2. 9,8%. 3. 3,11 години. 4. $n \approx 1.07$ години. 5. 168714 денари.

6. 107686,5 денари.

3.3.

1. $G_{20} = 3612,22$ денари. 2. $t = 12 + \frac{5}{12}, G_t = 10000 \cdot 1,02^{12} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{100}\right) = 12788,1$.

3. 741024 денари. 4. 3,434% 5. 819858 денари.

6. а) 21589,25 евра, б) 21911,23 евра, в) 22080,40 евра.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. $G_2 = 4665,6$ евра, $K_5 = 665,6$ евра. 2. 970,6 денари. 3. 11,11%. 4. $p = 23,8\%$.

5. 3,96 години. 6. 1608,598 денари. 7. $G_{20} = 6573,4$ денари.

8. $t = 10 + \frac{7}{12}, G_t = 10000 \cdot 1,05^{10} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \frac{7}{12}}{100}\right) = 197747,81$.

9. а) 180611 евра, б) 181401,8 евра, в) 181804,4 евра, г) 182075,5.

10. $G_5 = 16105,1$ денари. 11. 19965 евра. 12. $G_0 \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1 - \frac{pn}{100} \right) = 4864$ денари. 13.

$K = 2500 \left(\left(1 + \frac{2}{100}\right)^3 - 1 \right) = 153,02$ евра.

14. $50000 \cdot 1,045^{2n} = 60000 \cdot 1,015^{4n}$, па $n = 6,4$ години.

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 4

4.1.

1. Нека тврдењето е точно за $n = k$ (индуктивна претпоставка). Ќе докажеме дека тврдењето е точно за $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k^2 + 2k + 1) + 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1)}{4} = \\ &= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4}{4} = \frac{k^4 + 4k^3 + 4k^2 + 2k^3 + 8k^2 + 8k + k^2 + 4k + 4}{4} = \\ &= \frac{k^2(k^2 + 4k + 4) + 2k(k^2 + 4k + 4) + k^2 + 4k + 4}{4} = \frac{(k^2 + 2k + 1)(k^2 + 4k + 4)}{4} = \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

2. Нека тврдењето е точно за $n = k$ (индуктивна претпоставка). Ќе докажеме дека тврдењето е точно за $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

3. Нека тврдењето е точно за $n = k$ (индуктивна претпоставка). Ќе докажеме дека тврдењето е точно за $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3) &= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) = \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \end{aligned}$$

4. Нека тврдењето е точно за $n = k$ (индуктивна претпоставка). Ќе докажеме дека тврдењето е точно за $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} &= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \\ &= \frac{k(3k+4) + 1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2 + 3k + k + 1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k(3k+1) + (3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4} \end{aligned}$$

4.2.

1. Упатство: Ако со A го означиме $k+1$ -то теме на многуаголникот, тогаш имаме k -аголник кој има $\frac{k(k-3)}{2}$ дијагонали, му ги додаваме сите дијагонали кои може да ги

повлечеме од темето A т.е. $(k+1)-3$ и на крај дијагоналата образувана од двете соседни темиња со A која во k -аголникот е страна, но во $k+1$ -аголникот е дијагонала. Значи $\frac{k(k-3)}{2} + ((k+1)-3) + 1 = \frac{(k+1)((k+1)-3)}{2}$.

2. За $n+1$ на десната страна се добива

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2nx}{2 \sin x} + \cos((2n+1)x) &= \frac{\sin 2nx + 2 \cos((2n+1)x) \cdot \sin x}{2 \sin x} = \\ &= \frac{\sin 2nx + 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin((2n+1)x + x) - \sin((2n+1)x - x))}{2 \sin x} = \\ &= \frac{\sin 2nx + \sin(2n+2)x - \sin 2nx}{2 \sin x} = \frac{\sin 2(n+1)x}{2 \sin x}\end{aligned}$$

со примена на формулата за трансформација на производ од тригонометриски функции во збир т.е. $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$.

3. Упатство: $33333 = 3(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4)$ итн.

4.3.

1. $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \stackrel{u.n.}{>} n \cdot 2 = n + n \geq 1 + n$. **2.** $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot 10n^2 \geq 10(n+1)^2$.

3. $a_{n+1} = \sqrt{4 + a_n} < \sqrt{4 + 3} = \sqrt{7} < \sqrt{3}$.

4.4.

1. За $n = k$ заменувајќи во $a_n = n^3 + 5n$ се добива

$$\begin{aligned}(k+1)^3 + 5(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 = \\ &= \underbrace{3A}_{\text{и.п.}} + 3(k^2 + k + 2) = 3(A + k^2 + k + 2)\end{aligned}$$

2. За $n = k$, заменувајќи во $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ го добиваме изразот

$$5 \cdot (2^{k+2} \cdot 3^k + 1) + \underbrace{2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4}_{25m}. \text{ Со ПМИ се докажува дека } 2^{k+2} \cdot 3^k + 1 \text{ е деливо со } 5,$$

од каде следува $2^{k+2} \cdot 3^k + 1 = 5A$ или $5 \cdot (2^{k+2} \cdot 3^k + 1) + 2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4 = 25(A + m)$.

3. $3^{n+1} \cdot 5^{n+1+1} + 2^{n+1+3} = 15 \cdot 3^n \cdot 5^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+3} = 13 \cdot 3^n \cdot 5^{n+1} + 2(3^n \cdot 5^{n+1} + 2^{n+3})$.

4. Упатство: $(n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n+1)n^{4k-1} = (n+1)\left((n^3 - n^2 + n - 1)^{k+1} + n^{4k-1}\right)$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. За $n = k + 1$

$$2 + 4 + \dots + 2k + 2(k+1) = \underbrace{k(k+1)}_{\text{и. п.}} + 2(k+1) = (k+1)(k+2).$$

2. За $n = k + 1$

$$\begin{aligned}2^2 + 4^2 + \dots + (2k)^2 + (2(k+1))^2 &= \frac{2}{3}k(k+1)(2k+1) + 4(k+1)^2 = \\ &= \frac{2}{3}[k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2] = \frac{2}{3}[(k+1)(k(2k+1) + 6k + 6)] = \\ &= \frac{2}{3}(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6) = \frac{2}{3}(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6) = \\ &= \frac{2}{3}(k+1)[2(2k+3) + k(2k+3)] = \frac{2}{3}(k+1)(k+2)(2k+3).\end{aligned}$$

3. За $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} &= \frac{k}{\underbrace{3k+1}_{\text{и. п.}}} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \\ &= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k^2+3k+k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(k+1)(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}. \end{aligned}$$

4. 3a $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} &= \frac{k}{\underbrace{4k+1}_{\text{и. п.}}} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \\ &= \frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k^2+4k+k+1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{4k(k+1)+(k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{k+1}{4k+5}. \end{aligned}$$

6. 3a $n = k + 1$

$$5^{k+1} + 2^{k+2} = 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} = (3+2)5^k + 2 \cdot 2^{k+1} = 3 \cdot 5^k + 2 \cdot \underbrace{(5^k + 2^{k+1})}_{\text{индуктивна претпоставка}} = 3 \cdot 5^k + 2 \cdot 3m.$$

7. 3a $n = k + 1$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5^{2n+3} + 2^{3n+4} &= 3 \cdot 5^{2n+1} \cdot 5^2 + 2^{3n+1} \cdot 2^3 = 75 \cdot 5^{2n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} = \\ &= \underbrace{(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})}_{\text{индуктивна претпоставка}} + 72 \cdot 5^{2n+1} + 7 \cdot 2^{3n+1} = 17A + 3 \cdot 24 \cdot 5^{2n+1} + 7 \cdot 2^{3n+1} = \\ &= 17A + 3 \cdot 24 \cdot 5^{2n+1} + (24-17) \cdot 2^{3n+1} = 17A + 24 \cdot \underbrace{(3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1})}_{\text{индуктивна претпоставка}} - 17 \cdot 2^{3n+1} = \\ &= 17A + 24 \cdot 17A - 17 \cdot 2^{3n+1} = 17(25A - 2^{3n+1}). \end{aligned}$$

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 5

5.1.

1. а) $\operatorname{Re}(z) = 4$, $\operatorname{Im}(z) = 2$; б) $\operatorname{Re}(z) = -3$, $\operatorname{Im}(z) = 4$; в) $\operatorname{Re}(z) = 3$, $\operatorname{Im}(z) = -2$;

г) $\operatorname{Re}(z) = -4$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2}$; д) $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{2}$, $\operatorname{Im}(z) = 1 + \sqrt{3}$; е) $\operatorname{Re}(z) = 1 + \sqrt{2}$, $\operatorname{Im}(z) = 1$;

е) $\operatorname{Re}(z) = -3$, $\operatorname{Im}(z) = 0$; ж) $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = -3$.

2. а) $z = 3 + \frac{1}{2}i$; б) $z = -\frac{1}{4} + (2 - \sqrt{2})i$; в) $z = -\frac{1}{3} - \sqrt{3}$; г) $z = m + 1 + (n - \sqrt{2})i$.

3. а) $z = -2 + i$; б) $z = -5i$; в) $z = -4$; г) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

5.2.

1. а) $r = 2$, $\varphi = \frac{11\pi}{6}$; б) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$; в) $r = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{3}$; г) $r = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; д) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2. а) $z_1 = \left| \frac{1}{\cos \alpha} \right| (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$; б) $2 \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| (\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})$;

в) $z_3 = 3(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$.

3. а) $\frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}$; б) $-4 + 4i\sqrt{3}$.

4. а) $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$; б) $3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$; в) $2\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$;

г) $3(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$; д) $\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12}$. 5. $\bar{z} = z^{-1} = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$.

6. $\operatorname{Im}(z) = 0$ или $\operatorname{Re}(z) = 0$.

5.3.

$$1. \text{ а) } \sqrt{6}(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}) = \sqrt{6}(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})$$

$$\text{и } \sqrt{\frac{2}{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2});$$

$$\text{б) } \sqrt{2}(\cos \frac{13\pi}{4} + i \sin \frac{13\pi}{4}) = -1 - i \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2}(1 - i).$$

$$2. \text{ а) } z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}(-1 + i\sqrt{3}); \quad \text{б) } \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}); \quad \text{в) } \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}).$$

$$3. \text{ а) } \text{Модулот не се менува, аргументот се зголемува за } \frac{\pi}{2};$$

$$\text{б) } \text{Модулот не се менува, аргументот се намалува за } \frac{\pi}{2}. \quad 4. \text{ а) } 15i; \quad \text{б) } -24; \quad \text{в) } \sqrt{2}i.$$

$$5. \text{ а) } i; \quad \text{б) } \frac{1}{5}(1 + i\sqrt{3}); \quad \text{в) } \frac{\sqrt{2}}{3}(1 + i); \quad \text{г) } \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}.$$

$$6. \text{ а) } z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} \quad \text{и} \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}; \quad \text{б) } z_1 \cdot z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{и} \quad \frac{z_1}{z_2} = e^{-i\frac{5\pi}{12}}.$$

5.4.

$$1. \text{ а) } 2 + 2i\sqrt{3}; \quad \text{б) } 8i; \quad \text{в) } -16\sqrt{3} + 16i. \quad 2. 1. \quad 3. 0. \quad 4. \text{ а) } -22i\sqrt{2}; \quad \text{б) } 0; \quad \text{в) } 0.$$

$$5. \text{ а) } 2^{30}; \quad \text{б) } -2^{20}.$$

5.5.

$$1. \text{ а) } \{-1 - i\sqrt{3}, 2, -1 + i\sqrt{3}\}; \quad \text{б) } \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, i\right\};$$

$$\text{в) } \left\{\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}i, -\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{2}i, \sqrt[3]{2}i\right\}.$$

$$2. \text{ а) } \left\{\cos \frac{(3+4k)\pi}{8} + i \sin \frac{(3+4k)\pi}{8} \mid k=0,1,2,3\right\};$$

$$\text{б) } \left\{\sqrt[3]{4}(\cos \frac{(1+6k)\pi}{9} + i \sin \frac{(1+6k)\pi}{9}) \mid k=0,1,2\right\};$$

$$\text{в) } \left\{\sqrt[5]{16}(\cos \frac{(-2+6k)\pi}{15} + i \sin \frac{(-2+6k)\pi}{15}) \mid k=0,1,2,3,4\right\}.$$

$$3. \text{ а) } \sqrt[6]{12} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{6} \right), k=0,1,2,3,4,5; \quad \text{б) } \{1+i, -1-i\};$$

$$\text{в) } \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} \right), k=0,1.$$

$$4. \text{ а) } \cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi}{3}, k=0,1,2;$$

$$\text{б) } \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4} \right), k=0,1,2,3.$$

5.6.

4. Упатство: Претстави ги броевите во тригонометриска форма и потоа искористи ја Моавровата формула.

$$5. z = \sqrt[3]{64} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2. \quad 6. z = 2^{10} \cos^{10} \frac{\alpha}{2} (\cos 5\alpha - \sin 5\alpha).$$

$$7. \{a + ib, -a - ib, -b + ia, b - ia\}, \text{ каде што } a = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}, b = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}.$$

8. Упатство: Претстави ги броевите во тригонометриска форма и потоа искористи ја Моавровата формула.

$$9. \text{ а) } \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}; \quad \text{ б) } \{2i, -2i, \sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i\}; \quad \text{ в) } \{-3, 3, 3i, -3i\}.$$

$$10. \text{ а) } \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \cos(n+1)x \cdot \frac{\sin nx}{\sin x}; \quad \text{ б) } \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \cos(n+1)x \cdot \frac{\sin nx}{\sin x}.$$

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

$$3. \text{ а) } 13; \quad \text{ б) } 2; \quad \text{ в) } \sqrt{6}; \quad \text{ г) } 1; \quad \text{ д) } 2; \quad \text{ ё) } \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}. \quad 4. \text{ а) } 5; \quad \text{ б) } 10; \quad \text{ в) } \sqrt{2 - 2 \cos \varphi}.$$

$$6. \text{ а) } (\sqrt{3} + 1)(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ); \quad \text{ б) } 2(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}); \quad \text{ в) } 3(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2});$$

$$\text{ г) } 3(\cos \pi + i \sin \pi).$$

$$8. \text{ а) } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ б) } \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ в) } \frac{3\pi}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ г) } -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{ д) } \frac{\pi}{2} - \phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \quad \text{ ё) } \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad 9. \text{ а) } 15i; \quad \text{ б) } -12; \quad \text{ в) } i\sqrt{2}.$$

$$10. r = 2^n \left| \cos^n \frac{\alpha}{2} \right|, \varphi = \frac{n\alpha}{2}.$$

$$11. \text{ а) } r \text{ не се менува, а } \varphi \text{ ќе се зголеми за } \frac{\pi}{2};$$

$$\text{ б) } r \text{ не се менува, а } \varphi \text{ ќе се зголеми за } \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{ в) } r \text{ ќе се зголеми 4 пати, а } \varphi \text{ не се менува;}$$

$$\text{ г) } r \text{ ќе се зголеми 2 пати, а } \varphi \text{ ќе се зголеми за } \frac{3\pi}{2};$$

$$\text{ д) } r \text{ ќе се зголеми } \sqrt{2} \text{ пати, а } \varphi \text{ ќе се зголеми за } \frac{\pi}{4};$$

$$\text{ ё) } r \text{ не се менува, а } \varphi \text{ ќе се зголеми за } \frac{\pi}{3}.$$

$$12. \text{ а) } i; \quad \text{ б) } \frac{1}{5}(1 + i\sqrt{3}); \quad \text{ в) } \frac{\sqrt{2}}{5}(1 + i); \quad \text{ г) } \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}. \quad 13. \text{ а) } 1; \quad \text{ б) } i; \quad \text{ в) } -1; \quad \text{ г) } \frac{1}{8}(1 + i).$$

$$14. \text{ а) } 2; \quad \text{ б) } -\frac{5}{16}; \quad \text{ в) } \frac{1}{2^{10}}; \quad \text{ г) } 2^{10}. \quad 16. \text{ а) } x_1 = 4i, x_2 = -4i; \quad \text{ б) } x_1 = 2\sqrt{5}i, x_2 = -2\sqrt{5}i;$$

$$17. \text{ а) } x_1 = 2 + 4i, x_2 = 2 - 4i; \quad \text{ б) } x_1 = \frac{-3 + i\sqrt{23}}{2}, x_2 = \frac{-3 - i\sqrt{23}}{2};$$

$$\text{ в) } x_1 = \frac{7 + i\sqrt{31}}{4}, x_2 = \frac{7 - i\sqrt{31}}{4}; \quad \text{ г) } z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \quad \text{ д) } x_1 = 1, x_2 = i.$$

$$18. \text{ а) } x^2 - 4x + 5 = 0; \quad \text{ б) } x^2 + 5 = 0.$$

$$19. \text{ а) } x^2 - 4x + 13 = 0; \quad \text{ б) } x^2 - 24x + 313 = 0; \quad \text{ в) } x^2 - 2(1 + \cos \alpha)x + 2(1 + \cos \alpha) = 0.$$

20. а) $\{-3\sqrt{3}i, 3\sqrt{3}i\}$; б) $\left\{z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}$;
 в) $\left\{z_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{7} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{7} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$;
 г) $\left\{-\sqrt[4]{\frac{25}{36}}, \sqrt[4]{\frac{25}{36}}, -\sqrt[4]{\frac{25}{36}}i, \sqrt[4]{\frac{25}{36}}i\right\}$; д) $\{-2i, 2i, \sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i\}$;
 е) $\left\{-\sqrt[3]{2}i, \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right), \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right\}$;
 ж) $\left\{z_k = \cos \frac{(2+6k)\pi}{15} + i \sin \frac{(2+6k)\pi}{15} \mid k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}$;
 з) $\left\{z_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos \frac{(12k-1)\pi}{8} + i \sin \frac{(12k-1)\pi}{8}\right) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\right\}$;
 с) $\left\{z_k = \sqrt[14]{2}\left(\cos \frac{(8k+3)\pi}{28} + i \sin \frac{(8k+3)\pi}{28}\right) \mid k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$.

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 6

6.1.

1. $\gamma = 49^\circ 25'$, $b = 37,12$, $c = 29,01$. 2. $\gamma = 58^\circ 46'$, $a = 10,36$, $b = 58,65$.
 4. 3:5. 5. 6,5. 6. $\overline{BC} = 21\text{cm}$, $R = 7\sqrt{3}\text{cm}$.

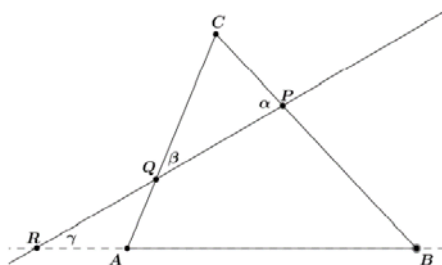
6.2.

1. $a = 16,62$, $\beta = 89^\circ 16'$, $\gamma = 46^\circ 14'$. 2. $c = 741,3$, $\alpha = 59^\circ 48'$, $\beta = 59^\circ 57'$.
 4. $95^\circ 4' 47''$. 5. 120° . 6. $a = \sqrt{13}$, $b = 3$, $c = 4$ или $a = \sqrt{13}$, $b = 4$, $c = 3$.

6.3.

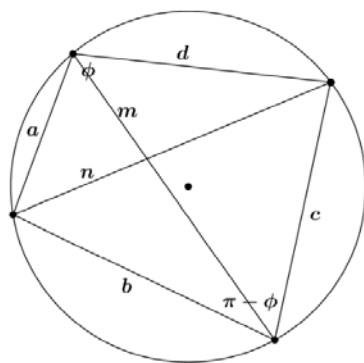
1. $\alpha = 52^\circ$, $c = 16,33$, $a = 11,67$, $b = 13,09$. 2. $a = 36,014$, $b = 28,014$, $c = 52,65$, $\gamma = 110^\circ$.
 3. $c = 6,09$, $\alpha = 54^\circ 42'$, $\beta = 29^\circ 18'$. 4. $\alpha = 86^\circ 18' 17''$, $\beta = 48^\circ 27' 20''$, $\gamma = 45^\circ 14' 23''$.
 5. $\alpha = 54^\circ 12'$, $\beta = 46^\circ 36'$, $\gamma = 79^\circ 12'$. 6. $a = b = c = 30$, $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

6.4.



1. $\angle CPQ = \alpha$, $\angle CQP = \beta$, $\angle PRB = \gamma$, па од синусната теорема

$$\frac{\overline{RB}}{\overline{PB}} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad \frac{\overline{PC}}{\overline{QC}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \frac{\overline{QA}}{\overline{RA}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}.$$



2. Од косинусната теорема $n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \phi = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\pi - \phi)$, од каде $n^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}$ и $m^2 = \frac{(bc + ad)(ac + bd)}{ab + cd}$. Со множење на овие две равенства се добива тврдењето т.е. $mn = ac + bd$.
3. $140,7 \text{ cm}^2$. 4. 15.

6.5.

1. $\frac{125}{12} \text{ cm}^3$. 2. 1. 3. 12π . 4. а) $PR = 33,4 \text{ cm}$; б) $\sphericalangle PER = 69^\circ$.
5. а) $\overline{AX} = 5 \text{ cm}$, $\overline{AY} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$, $\overline{XY} = \sqrt{29} \text{ cm}$. б) $\sphericalangle XAY = 55^\circ 18'$. в) $P = 13 \text{ cm}^2$.

6.6.

1. $\approx 30 \text{ N}$. 2. 362 метри. 3. 3068 метри. 4. $1074,8 \text{ km}$. 5. $\approx 100 \text{ m}$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. $s = 4$. 2. $a = 6,3 \text{ cm}$. 3. $b = 21,4 \text{ cm}$. 4. $10,4 \text{ cm}$. 5. $8,1 \text{ cm}$. 6. $8,2 \text{ cm}$. 7. $a = \sqrt{39}$.
10. 31145 m^2 .

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 7

7.1.

1. Упатство. Точката O лежи на отсечката AB и $\overline{OA} = \overline{OB}$.
2. а) Да; б) Не; в) Не; г) Да; д) Не. 3. Точни се исказите под а), в) и д).
4. $\vec{a} = \vec{c}$ и $\vec{m} = \vec{p}$.

7.2.

1. $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$. 2. а) $\overline{BC}$; б) $\overline{DB}$; в) $\vec{0}$; г) $\overline{AB}$.
3. $\overline{BC} = \overline{FE} = \overline{AB} + \overline{AF} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overline{CD} = \overline{AF} = \vec{b}$ и $\overline{ED} = \overline{AB} = \vec{a}$.

7.3.

2. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 10$. 3. а) $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c}$; б) $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c}$.
4. $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overline{BC} = -\vec{b} - \vec{a}$, $\overline{CD} = \vec{a} - \vec{b}$ и $\overline{DA} = \vec{a} + \vec{b}$.

7.4.

4. а) $19\vec{a} + 4\vec{b}$; б) $9\vec{a} + 24\vec{c}$. 5. а) $\vec{x} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$; б) $\vec{x} = \frac{1}{5}\vec{b}$.

6. Упатство. Бидејќи M е средина на отсечката AB , а N е средина на отсечката CD ,

имаме $2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD}$, па
 $2\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CN} =$
 $= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, и
 $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

7.5.

1. а) $x = 3$, $y = -3$; б) не постојат такви x и y . 2. $p = 0$.

4. Упатство: Од $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AN} + \lambda \overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}\vec{a} + \lambda\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)$ и

$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \mu\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$ имаме $\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} - \mu\right)\vec{a} = \left(-\lambda - \frac{\mu}{2}\right)\vec{b}$. $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$.

7.6.

1. а) $a_x = -2$, $a_y = 1$, $a_z = -1$; б) $a_x = -3$, $a_y = 4$, $a_z = 3$; в) $a_x = 1$, $a_y = 0$, $a_z = -1$;

г) $a_x = 0$, $a_y = 1$, $a_z = 6$.

2. а) $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$; б) $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$; в) $\vec{a} = -\vec{i} + 5\vec{j}$; г) $\vec{a} = \vec{j}$.

7.7.

1. а) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (5, -4, 0)$; б) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (3, 6, 5)$.

2. а) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (-6, 6, 10)$; б) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (2, 4, -3)$.

3. а) $2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 = (-3, 3, 8)$; б) $-3\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (1, 6, -7)$; в) $4\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (-1, -9, 9)$.

4. а) $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 4\vec{a}_3 = (-10, 20, 2)$; б) $2\vec{a}_1 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = (1, -5, -7)$;

в) $-\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 3\vec{a}_3 - 4\vec{a}_4 = (3, 9, -6)$.

7.8.

1. а) $M(-1, -1, 1)$; б) $M(1, 0, -1)$. 2. $B(3, 2, -1)$.

3. а) $M\left(\frac{12}{5}, 2, \frac{14}{5}\right)$; б) $M\left(\frac{18}{5}, 2, \frac{16}{5}\right)$; в) $M\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$.

4. $S_{AB}\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -9\right)$, $S_{BC}\left(\frac{9}{2}, -5, 5\right)$, $S_{AC}\left(-4, \frac{11}{2}, 7\right)$.

7.9.

1. а) 7; б) 4; в) 49. 2. а) -10; б) 16; в) 25. 3. а) Позитивен; б) Негативен.

4. 36. 5. а) 72; б) 63; в) 27.

7.10.

1. $|\vec{p}| = \sqrt{11}$. 2. $\cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{5\sqrt{133}}{133}$. 3. $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{27\sqrt{2}}{2\sqrt{527}}$.

4. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол при темето C . Ако $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, тогаш $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (направи цртеж). Имаме

$|\vec{c}|^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, бидејќи $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

5. $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

7.11.

1. а) 14; б) -8. 2. а) $\sqrt{41}$; б) $\sqrt{14}$. 3. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$. 4. $\frac{\pi}{3}$. 5. а) Не; б) Да.

7.12.

1. Од $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ имаме $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогаш
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 30\sqrt{3}$.
 2. $\vec{a} \times \vec{b} = -4\vec{p} + 26\vec{q} + 14\vec{r}$.
 3. Од $\cos(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = -\frac{1}{4}$ имаме $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Тогаш
 $|\vec{m} \times \vec{n}| = |\vec{m}| |\vec{n}| \sin(\vec{m}, \vec{n}) = 4\sqrt{15}$.

7.13.

1. $P = 2\sqrt{2}$. 2. $P = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. 3. $h = \frac{4\sqrt{2}}{5}$. 4. $t = -\frac{1}{21}$.

7.14.

1. а) $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, -8)$; б) $\vec{a} \times \vec{b} = (6, 2, 3)$.
 2. а) $\vec{a} \times \vec{b} = (5, 1, 7)$; б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = (10, 2, 14)$; в) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b}) = (-20, -4, -78)$.
 3. $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\sqrt{17}}{21}$. 4. $P = \sqrt{286}$. 5. $P = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. 6. $x = 8, y = 4$.

7.15.

2. 1. 3. 56. 4. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 48$.
 5. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 1 \cdot 1 \cdot \sin \alpha \cdot 1 \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$.

7.16.

1. $V = 6\sqrt{3}$. 2. $V = 120$. 3. $V = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. 4. Не.

7.17.

1. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -17$. 2. $H = \frac{10\sqrt{59}}{59}$. 3. $|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = 32$. 4. Не. 5. $t_1 = 1, t_2 = 1 + \sqrt{2},$
 $t_3 = 1 - \sqrt{2}$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ формираат четриаголник ако нивниот збир е нултиот вектор. Според тоа, $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + 2\vec{r}$.
 2. $\vec{CB} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{DC} = -\vec{b}$, $\vec{DE} = -\vec{a}$ и $\vec{EF} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$.
 3. Бидејќи $ODEF$ е паралелограм, имаме дека $\vec{OE} = \vec{OD} + \vec{OF}$. Тогаш

$$\begin{aligned} \vec{AD} + \vec{EB} + \vec{CF} &= (\vec{AO} + \vec{OD}) - (\vec{BO} + \vec{OE}) + (\vec{CO} + \vec{OF}) = \\ &= \vec{OD} + \vec{OD} - (\vec{OE} + \vec{OE}) + \vec{OF} + \vec{OF} = \\ &= (\vec{OD} + \vec{OF}) + (\vec{OD} + \vec{OF}) - (\vec{OE} + \vec{OE}) = \vec{OE} + \vec{OE} - (\vec{OE} + \vec{OE}) = \vec{0} \end{aligned}$$

4. $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}$. 5. $A\left(\frac{14}{3}, -8, 12\right)$, $B\left(\frac{11}{3}, 7, -13\right)$.

6. $k = -\vec{b} \cdot \vec{c}$. 7. $\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b})$. 8. $\frac{\pi}{2}$. 9. 4 и $\sqrt{7}$.

10. а) $\vec{a} \times \vec{b} = (4, 5, 7)$; б) $\vec{b} \times \vec{a} = (-4, -5, -7)$; в) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = (-8, -10, -14)$.

11. Нека бараниот вектор $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Тогаш $\vec{a} \times \vec{b} = 2\lambda\vec{j} - 4\lambda\vec{k}$ и

$$\vec{c} \times \vec{d} = (2z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - 2x)\vec{k}. \text{ Од првиот услов имаме } \begin{cases} 2z - y = 0 \\ x - z = 2\lambda \\ y - 2x = -4\lambda \end{cases} \text{ додека од}$$

$$\text{вториот услов добиваме } \begin{cases} 2z - y = 0 \\ x - 2z = \lambda \\ 2x - 2y = 2\lambda \end{cases}. \text{ Од двата услови добиваме } x = 5, y = 6, z = 3,$$

односно $\vec{d} = 5\lambda\vec{i} + 6\lambda\vec{j} + 3\lambda\vec{k}$.

12. Нека $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Од условот на задачата имаме $\vec{p} \cdot \vec{a} = x + y + z = 3$, $\vec{p} \times \vec{b} = -z\vec{i} + z\vec{j} + (x - y)\vec{k} = \vec{i} - \vec{j}$, од каде што следува $x = y = 2$, па $\vec{p} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

13. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = -7\vec{i} - 2\vec{j} - 21\vec{k}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = 6\vec{i} + 60\vec{j} + 63\vec{k}$.

14. $P = |\vec{a} \times \vec{b}| = 8\sqrt{3}$, $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{24}}$. 15. $P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{\sqrt{286}}{2}$.

16. $P = 5\sqrt{3}$. 17. а) $x = 2$ и $x = -1$; б) Не постои x за кој векторите би биле паралелни.

18. $t = 3$. 19. $V = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -6$. 20. $H = \frac{23}{\sqrt{158}}$.

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 8

8.1

1. а) 7; б) 0; в) 1; г) $-2b^3$.

2. а) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$; б) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; в) $x_1 = -2$, $x_2 = -\sqrt{5}$, $x_3 = \sqrt{5}$.

3. а) $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; б) $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$; в) $x \in (-7, 1)$.

8.2

1. а) 4; б) 33;

в) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$;

г) $(a - b)(b - c)(c - a)$.

2. а) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; б) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$; в) $x_1 = a$, $x_2 = b$.

3. а) $x^2 + y^2 + z^2 + 1$; б) 0; в) $ax^2 + bx + c$.

4. а) 1; б) 2; в) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$. 5. а) 0; б) 20; в) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

8.3.

1. а) 0; б) 6; в) 0.

3. а) Упатство. Првата редица додај ја втората редица, а потоа помножена со -2 додај

ја на третата редица. Се добива детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. На крај, втората редица

помножена со $\frac{3}{2}$ додај ја на третата редица. **Одговор.** 5; **б)** 0;

в) Упатство. Замени ги местата на првата и втората редица. **Одговор.** 2.

8.4.

1. а) $x=1$, $y=-2$, $z=1$; **б)** нема решение; **в)** $x=\frac{5}{11}(1-t)$, $y=\frac{1}{11}(9+13t)$, $z=t$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Детерминантата на системот е $\Delta = -a^2 + 3a - 3 \neq 0$, за секој $a \in \mathbb{R}$. Системот има единствено решение $x = \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 3a + 3}$, $y = \frac{-1}{a^2 - 3a + 3}$, $z = \frac{5a + 38}{2(a + 2)}$, каде што a е параметар.

3. а) $x=2t$, $y=-3t$, $z=5t$, $t \in \mathbb{R}$; **б)** Бидејќи $\Delta \neq 0$, системот нема ненулти решенија. Значи $x=0$, $y=0$, $z=0$, е единствено решение.

8.5

1. а) Од ред 3×4 ; **б)** Првата редица $(41, 1, 16, 0)$, и третата колона $(16, -9, -4)$;

в) $a_{13}=16$, $a_{24}=10$, $a_{33}=-4$, $a_{32}=8$, $a_{14}=5$ и $a_{21}=62$.

2. а) Не; **б)** Не. **3.** $a=-3$, $b=4$, $c=-1$, $d=2$. **4.** $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$.

5. а) 3×3 ; **б)** 1, 3 и -4. **6.** $\begin{bmatrix} 40 & 60 & 20 & 30 \\ 50 & 50 & 15 & 35 \\ 40 & 45 & 25 & 40 \\ 30 & 20 & 10 & 20 \\ 35 & 40 & 15 & 25 \end{bmatrix}$. **7. в)** Не.

8.6

1. $A+B = \begin{bmatrix} 5 & 24 & 0 \\ 24 & -3 & 2 \\ -7 & -7 & 3 \end{bmatrix}$. **2.** $0,5 \cdot A = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ -0,5 & 2 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}$.

3. а) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$; **б)** $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -1 & 3 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$; **в)** $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 13 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$. **4.** $x=5$, $y=0$, $z=2$, $t=3$.

8.7

1. AB има ред $m \times m$, а BA има ред $n \times n$. Ако $m \neq n$, тогаш $AB \neq BA$.

2. а) $\begin{bmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{bmatrix}$; **б)** $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -5 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 880 & 930 \\ 700 & 720 \end{bmatrix}$.

8.8

1. а) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$; г) Не е инверзибилна.

2. а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$; б) Не е инверзибилна; в) $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

3. а) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$. 4. $D^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n})$.

8.9

1. $X = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$. 4. $X = \begin{bmatrix} 14 & -15 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. 5. $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. 6. $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -4 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

8.10

1. а) $AX = B$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$; б) $AX = B$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -10 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. а) $x=4$, $y=-2$, $z=1$; б) $x=3$, $y=-2$, $z=5$; в) $x=1$, $y=2$, $z=3$;
г) $x=1$, $y=5$, $z=1$.

3. Треба да се произведат 130 парчиња од производот P_1 , 40 парчиња од производот P_2 и 50 парчиња од производот P_3 .

4. Килограм краставици чини 30 денари, килограм домати чини 20 денари и килограм кромид чини 40 денари.

8.11

1. Нема решение. 2. $x=3$, $y=-2$, $z=2$. 3. $x=y=z=1$. 4. $x=1$, $y=2$, $z=-1$.

5. $x=2$, $y=-3$, $z=2$. 6. $x=1$, $y=-2$, $z=1$. 7. $x=3$, $y=-2$, $z=1$.

8. $x=5$, $y=2$, $z=-1$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) -1 , б) 1 . 5. 1 . 6. $x \in (-6, -4)$. 7. $a=12$.

8. а) $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a+c}{2}$, $z = \frac{b+c}{2}$; б) $x = \frac{a-b+c}{2}$, $y = \frac{a+b-c}{2}$, $z = \frac{b+c-a}{2}$.

9. Ако $a \neq 1$ и $a \neq -2$, единствено решение е $x = -\frac{a+1}{a+2}$, $y = \frac{1}{a+2}$, $z = \frac{(a+1)^2}{a+2}$.

Ако $a = -2$, системот нема решение, а ако $a = 1$, тогаш решение е секоја тројка (x, y, z) таква што $x = y + z = 1$.

10. $a=b$. 11. $x=bc$, $y=ac$, $z=ab$. 12. $x=y=z=t=0$.

13. $(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$16. \text{ а) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{bmatrix}; \text{ б) } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \text{ в) } -\frac{1}{a(a+3)} \begin{bmatrix} -(a+2) & 1 & 1 \\ 1 & -(a+2) & 1 \\ 1 & 1 & -(a+2) \end{bmatrix}.$$

$$17. \text{ а) } X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \text{ б) } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \text{ в) } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \text{ г) } X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$18. \text{ а) } AX = B, A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & -10 \\ 4 & 10 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 28 \\ -26 \\ 10 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{ б) } AX = B, A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ -9 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 60 \\ -21 \\ 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$19. \text{ а) } x=3, y=-2, z=1; \text{ б) } x=5, y=2, z=-1. \text{ 20. } \begin{bmatrix} 500 & 100 & 600 \\ 300 & 700 & 400 \\ 200 & 400 & 800 \end{bmatrix}.$$

$$21. A - B = \begin{bmatrix} -300 & 200 & -300 \\ -100 & 400 & 500 \end{bmatrix} \text{ на според тоа семејството } A \text{ троши 300 киловат часови}$$

помалку од семејството B во месеците март и мај и 200 киловат часови повеќе во април во 2021. Во 2022 семејството A троши 100 киловат часови помалку од семејството B во месец март, 400 киловат часови повеќе во април и 500 киловат часови повеќе во мај.

$$22. AB = \begin{bmatrix} 1840 & 1510 \\ 1240 & 1230 \end{bmatrix}.$$

23. $x=3$, $y=2$ и $z=1$, каде x е цена на единична количина боја, y е цена на четка и z е цена на единична количина платно.

24. 16 рози, 2 лалиња и 6 гербери.

МОДУЛАРНА ЕДИНИЦА 9

9.1

$$1. \text{ а) } f(-1) = (-1)^4 - 2(-1) + 4 = 7; \text{ б) } f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0 + 4 = 4; \text{ в) } f(2) = 2^4 - 4 + 4 = 16.$$

2. а) Да, бидејќи имаат иста дефинициона област и имаат исто дејство;

б) Не, бидејќи имаат различно дејство. Попрецизно, $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, за секој $x \in \mathbb{R}$, додека $g(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

$$3. \text{ а) } D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, \infty); \text{ б) } D_f = [-1, \infty); \text{ в) } D_f = (-1, 1).$$

$$4. \text{ а) } D_f = \mathbb{R}; \text{ б) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}; \text{ в) } D_f = (-\infty, 1].$$

$$5. \text{ а) } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ б) } D_f = \left(-\frac{4}{3}, \infty\right). \text{ в) } D_f = [1, 4].$$

$$7. \text{ а) } x = -1; \text{ б) } x = 0; \text{ в) } x_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}; \text{ г) } \text{Функцијата нема нули.}$$

$$8. (f+g)(x) = x^3 + x + 1, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}, (fg)(x) = x^3(x+1), \text{ за секој } x \in \mathbb{R},$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{x^3}{x+1}, \text{ за секој } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

9.2.

1. а) $a = 6$, $b = -1$; б) $a = -2$, $b = 1$; в) $a = \sqrt{3}$, $b = -\frac{1}{2}$; г) $a = \frac{3}{7}$, $b = -\frac{5}{7}$.

2. а) $x_0 = 3$; б) $x_0 = -\frac{9}{10}$; в) $x_0 = 4$; г) $x_0 = -\frac{1}{7}$.

3. а) $a = 2$; б) $a = \frac{8}{3}$; в) $a = 1$.

4. Точката A не припаѓа на графикот на функцијата, точката B не припаѓа на графикот на функцијата, точката C не припаѓа на графикот на функцијата, точката D припаѓа на графикот на функцијата.

5. а) Монотоно растечка; б) Монотоно опаѓачка; в) Монотоно опаѓачка.

9.3.

1. а) $f(x) = (x-1)^2 + 2$; б) $f(x) = -2(x-3)^2 + 8$; в) $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

2. а) $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$; б) $x = 3$; в) Функцијата нема нули.

3. а) $T\left(\frac{3}{8}, -\frac{25}{16}\right)$; б) $T(3, -2)$; в) $T(8, 4)$.

4. а) Монотоно опаѓа на $(-\infty, -1)$, монотоно расте на $(-1, +\infty)$;

б) Монотоно расте на $(-\infty, -2)$, монотоно опаѓа на $(-2, +\infty)$;

в) Монотоно расте на $(-\infty, 0)$, монотоно опаѓа на $(0, +\infty)$.

5. а) $V_f = [0, +\infty)$; б) $V_f = [6, +\infty)$; в) $V_f = \left[-\infty, \frac{45}{4}\right]$.

9.5.

1. а) Да; б) Не; в) Да; г) Да.

2. а) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, графикот на функцијата е непрекината линија над x -оската, ја сече y -оската во точката $(0, 1)$, и бидејќи $3 > 1$ функцијата е растечка;

б) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, графикот на функцијата е непрекината линија над x -оската, ја сече y -оската во точката $(0, 1)$, и бидејќи $\frac{1}{3} < 1$ функцијата е опаѓачка;

в) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, графикот на функцијата е непрекината линија над x -оската, ја сече y -оската во точката $(0, 1)$, и бидејќи $5, 2 > 1$ функцијата е растечка;

г) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, графикот на функцијата е непрекината линија над x -оската, ја сече y -оската во точката $(0, 1)$, и бидејќи $0, 4 < 1$ функцијата е опаѓачка.

3. а) $D_f = \mathbb{R}$; б) $D_f = \mathbb{R}$; в) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; г) $D_f = [0, +\infty)$.

4. а) Функцијата е растечка; б) Функцијата е опаѓачка; в) Функцијата е опаѓачка; г) Функцијата е опаѓачка.

9.6

1. а) Да; б) Да; в) Не.

2. а) $D_f = \mathbb{R}^+$, $V_f = \mathbb{R}$, $x = 1$ е нула на функцијата, и бидејќи $5 > 1$ функцијата е растечка;

б) $D_f = \mathbb{R}^+$, $V_f = \mathbb{R}$, $x = 1$ е нула на функцијата, и бидејќи $0, 3 < 1$ функцијата е опаѓачка;

в) $D_f = \mathbb{R}^+$, $V_f = \mathbb{R}$, $x=1$ е нула на функцијата, и бидејќи $\frac{1}{7} < 1$ функцијата е опаѓачка;

3. а) $D_f = (0, +\infty)$; **б)** $D_f = (-9, +\infty)$; **в)** $D_f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$;

г) $D_f = (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

4. а) Функцијата е опаѓачка; **б)** Функцијата е опаѓачка; **в)** Функцијата е растечка.

9.7.

1. $(f \circ g)(x) = \ln(e^{2x-3} + 1)$, $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = e^{2\ln(x+1)x-3}$, $D_{g \circ f} = (-1, +\infty)$.

2. а) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$; **б)** $f^{-1}(x) = \log_2 x$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$;

в) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; **г)** $f^{-1}(x) = x^3$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$.

9.8.

1. а) $a_n = 3n - 1$; **б)** $a_n = \frac{3n+1}{n}$; **в)** $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

9.9.

1. а) $n_0 = 9$; **б)** $n_0 = 99$; **в)** $n_0 = 999$. **2. а)** $+\infty$; **б)** кон конечен реален број; **в)** $-\infty$.

3. $n = 4$. **4.** Не.

5. Низата $a_n = (-1)^n$ нема граница, но низата $a_n^2 = (-1)^{2n} = 1$ има граница. Низата

$a_n = \frac{1}{n}$ има граница, и низата $a_n^2 = \frac{1}{n^2}$ има граница.

9.10.

1. $\frac{7}{9}$. **2.** 0. **3.** 8. **4.** $\frac{1}{16}$. **5.** -1. **6.** $\frac{1}{3}$. **7.** $\frac{1}{2}$. **8.** ∞ . **9.** 1.

9.11.

3. а) Непрекината како композиција од непрекинати функции;

б) Непрекината како збир од непрекинати функции;

в) Непрекината како композиција од непрекинати функции;

г) Непрекината како производ од непрекинати функции.

4. а) $x = -1$; **б)** $x = 2$ и $x = 3$; **в)** $x = \pm 1$.

9.12.

2. $\delta = \frac{1}{3000}$. **3. а)** $\frac{1}{4}$; **б)** -5; **в)** $\log_2 3$. **4. а)** 4; **б)** -4; **в)** $\sqrt{2}$.

5. а) 3; **б)** $\frac{1}{3}$; **в)** 2; **г)** $\frac{7}{4}$; **д)** 6, **е)** -3. **6. а)** -13; **б)** 4; **в)** 5. **7. а)** 6; **б)** 4; **в)** $\frac{2}{3}$.

8. а) 3; **б)** $\frac{5}{2}$; **в)** -1. **9. а)** -7; **б)** $\frac{1}{6}$; **в)** $-\frac{3}{5}$. **10. а)** -2; **б)** $\frac{7}{2}$; **в)** $\frac{15}{11}$.

11. а) $\frac{1}{4}$; **б)** -1; **в)** -2. **12. а)** $-\frac{1}{12}$; **б)** $-\frac{1}{3}$; **в)** 4.

13. а) $\frac{2}{3}$; **б)** $-\frac{1}{2}$; **в)** -2; **г)** 1; **д)** 0; **е)** $+\infty$. **14. а)** 0; **б)** 1; **в)** -1; **г)** 0; **д)** 0; **е)** 0.

15. а) $-\infty$; б) $+\infty$; в) $+\infty$.

9.13.

1. а) e ; б) e^{-2} ; в) e^6 ; г) e^6 . 2. а) 1; б) 3; в) $\frac{1}{a}$; г) 1; д) 3; е) 1.

3. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{a+1}{3a^2}$; в) $3x^2$; г) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$.

9.14.

1. а) Вертикална асимптота $x=1$, $x=-1$, коса асимптота $y=x$;
 б) Горизонтална асимптота $y=1$; в) вертикална асимптота $x=-1$.
 2. а) Горизонтална асимптота $y=0$; б) Нема асимптоти;
 в) хоризонтална асимптота $y=0$ и вертикална асимптота $x=-1$.
 3. За $k=2$, коса асимптота $y=2x-3$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. а) $D_f = [-1, 3]$; б) $D_f = (0, 4)$.
 2. а) Функцијата монотонно опаѓа; б) Функцијата монотонно расте;
 в) Функцијата монотонно расте; г) функцијата монотонно расте.
 3. а) $(-1, 0)$ и $(1, 0)$; б) $(-3, 0)$ и $(3, 0)$; в) Графикот нема пресечни точки со x -оската.
 4. а) $k > -\frac{3}{2}$; б) $k > 5$.
 5. а) $T(1, 3)$, функцијата монотонно опаѓа на интервалот $(-\infty, 1)$ и монотонно расте на интервалот $(1, +\infty)$, $V_f = [3, +\infty)$;
 б) $T(-1, -7)$, функцијата монотонно расте на интервалот $(-\infty, -1)$ и монотонно опаѓа на интервалот $(-1, +\infty)$, $V_f = (-\infty, -7]$;
 в) $T(0, 5)$, функцијата монотонно расте на интервалот $(-\infty, 0)$ и монотонно опаѓа на интервалот $(0, +\infty)$, $V_f = (-\infty, 5]$.
 7. а) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, опаѓа на интервалот $(-\infty, 0)$ и расте на интервалот $(0, +\infty)$, има нула во $x=0$, графикот е симетричен во однос на y -оската, и минува низ точките $(-1, 1)$, $(0, 0)$ и $(1, 1)$;
 б) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}$, расте на целата реална права, има нула во $x=0$, графикот е симетричен во однос на координатниот почеток, и минува низ точките $(-1, -1)$, $(0, 0)$ и $(1, 1)$;
 в) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $V_f = \mathbb{R}^+$, расте на интервалот $(-\infty, 0)$ и опаѓа на интервалот $(0, +\infty)$, нема нули, графикот е симетричен во однос на y -оската, и минува низ точките $(-1, 1)$, и $(1, 1)$;
 г) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $V_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, опаѓа на целата дефинициона област, нема нули, графикот е симетричен во однос на на координатниот почеток, и минува низ точките $(-1, -1)$ и $(1, 1)$;
 д) $D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $V_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, расте на целата дефинициона област, има нула во $x=0$, графикот минува низ точката $(1, 1)$;
 е) $D_f = \mathbb{R}$, $V_f = \mathbb{R}$, расте на целата дефинициона област, има нула во $x=0$, графикот минува низ точките $(-1, -1)$ и $(1, 1)$.

10. а) $f^{-1}(x) = \frac{8}{4x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$; **б)** $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;

в) $f^{-1}(x) = (x-1)^3, x \in \mathbb{R}$; **г)** $f^{-1}(x) = \lg(x-3) + 2, x \in (3, +\infty)$.

11. а) $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$; **б)** $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}$; **в)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}$. **12.** $n_0 = 697$. **15.** 2. **16.** $\frac{2}{5}$.

17. 2. **18.** $\frac{1}{2}$. **19.** 1. **20.** $-\frac{5}{2}$. **22. а)** 3; **б)** $\sqrt{2}$; **в)** $\frac{1}{4}$; **г)** $\frac{1}{2}$; **д)** 2; **е)** $4a\sqrt{a-1}$.

23. а) $\frac{2}{3}$; **б)** $\frac{1}{3}$; **в)** 2. **24. а)** $\frac{1}{2}$; **б)** 0; **в)** $\frac{10}{7}$. **25.** $\frac{1}{e^2}$. **26.** e^2 . **27.** $\frac{1}{e}$. **28.** e .

29. а) Вертикална асимптота $x = 2$, хоризонтална асимптота $y = 1$;

б) Вертикална асимптота $x = 3$, коса асимптота $y = x + 2$;

в) Вертикална асимптота $x = 0$, коса асимптота $y = x + 1$;

г) Хоризонтална асимптота $y = 0$; **д)** Вертикални асимптоти $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$, $y = -x$;

е) Коса асимптота $y = \frac{1}{2}x$, **ж)** хоризонтални асимптоти $y = -1$ и $y = 1$;

з) Хоризонтална асимптота $y = 0$.

СОДРЖИНА

1. СИСТЕМИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ	5
1.1. Систем од една квадратна и една линеарна равенка со две непознати	5
1.2. Систем од две квадратни равенки со две непознати	9
1.3. Систем од две квадратни равенки со две непознати од кои едната е хомогена	12
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ	17
2. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ	19
2.1. Линеарна равенка со две непознати	19
2.2. Линеарна неравенка со две непознати	20
2.3. Систем од две линеарни неравенки со две непознати	24
2.4. Графичко претставување на систем од повеќе линеарни неравенки со две непознати и примена	27
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ	34
3. СЛОЖЕНА КАМАТНА СМЕТКА	36
3.1. Поим за сложена камата	36
3.2. Формула за пресметување сложена камата	39
3.3. Примена на сложена камата	41
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ	43
4. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА	44
4.1. Математичка индукција	44
4.2. Примена на ПМИ при докажување идентитети	47
4.3. Примена на ПМИ при докажување неравенства	49
4.4. Примена на ПМИ при докажување елементарни деливости	50
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ	51
5. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ	53
5.1. Повторување за комплексни броеви во алгебарски облик	53
5.2. Поим за тригонометриски и експоненцијален облик на комплексен број	57
5.3. Операции со комплексни броеви во тригонометриски облик	62
5.4. Степенување на комплексен број во тригонометриски облик. Моаврова формула	64
5.5. Коренување на комплексни броеви	66
5.6. Примена на комплексни броеви	69
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ	74
6. РЕШАВАЊЕ НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИАГОЛНИК	76
6.1. Синусна теорема	76
6.2. Косинусна теорема	80
6.3. Тангенсна теорема. Ојлерови формули	81
6.4. Примена на теоремите во планиметрија	84
6.5. Примена на теоремите во стереометрија	86
6.6. Примена на теоремите во механика и во практичниот живот	89
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ	92
7. ВЕКТОРИ ВО ПРОСТОР	93
7.1. Поим за вектор во простор	93
7.2. Собирање на вектори	95
7.3. Одземање на вектори	99
7.4. Множење на вектор со скалар	100
7.5. Делење на колинеарни вектори	102

7.6. Координати на вектор	104
7.7. Операции со вектори во координатен облик	107
7.8. Делење на отсечка во даден однос	109
7.9. Скаларен производ на вектори	111
7.10. Примена на скаларен производ на вектори	112
7.11. Скаларен производ на вектори во координатен облик	115
7.12. Векторски производ на вектори	117
7.13. Примена на векторскиот производ на вектори	119
7.14. Векторски производ на вектори во координатен облик	121
7.15. Мешан производ на вектори.....	123
7.16. Примена на мешан производ на вектори	126
7.17. Мешан производ на вектори во координатен облик	128
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ	132

8. МАТРИЦИ	134
8.1. Детерминанти од втор ред	134
8.2. Детерминанти од трет ред	136
8.3. Својства на детерминантите од трет ред	140
8.4. Систем од три линеарни равенки со три непознати	145
8.5. Поим за матрица	149
8.6. Собирање и одземање на матрици. Множење на матрица со број	153
8.7. Множење на матрици	156
8.8. Инверзна матрица	159
8.9. Матрични равенки	162
8.10. Матрична презентација на систем од три линеарни равенки со три непознати	166
8.11. Гаусов метод на елиминација	170
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ	175

9. ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА ФУНКЦИЈА	178
9.1. Реална функција	178
9.2. Линеарна функција	183
9.3. Квадратна функција	185
9.4. Степенски функции	189
9.5. Експоненцијална функција	193
9.6. Логаритамска функција	198
9.7. Инверзна функција	201
9.8. Поим за низа	204
9.9. Граница на низа	207
9.10. Пресметување на граница на конвергентни низи	212
9.11. Непрекинатост на функција	214
9.12. Гранична вредност на функција	216
9.13. Специјални гранични вредности	224
9.14. Асимптоти на функција	226
ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ	229

Одговори, упатства решенија на задачите.....	231
---	------------